



## Plasticitetsteori for coulumb-materialer

**Exner, Hans; Nielsen, Mogens Peter**

*Publication date:*  
1983

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Exner, H., & Nielsen, M. P. (1983). *Plasticitetsteori for coulumb-materialer*. Technical University of Denmark. BYG-Rapport No. R-175

---

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Afdelingen for Bærende Konstruktioner  
Department of Structural Engineering  
Danmarks Tekniske Højskole - Technical University of Denmark

*MPN*

## Plasticitetsteori for Coulomb-Materialer

Hans Exner

Serie R

No 175

1983

til professor M. P. Nielsen  
Tak for det meget inspirerende  
samarbejde. <sup>4p</sup> Hans Exner

Plasticitetsteori for

Coulomb-materialer

Hans Exner

Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole

1983

### Forord

Denne rapport er et led i de betingelser, der skal opfyldes for opnåelse af den tekniske licentiatgrad. Professor, dr. techn. Mogens Peter Nielsen har været faglærer ved licentiatstudiet. Jeg vil gerne takke ham for et godt samarbejde. Jeg vil også takke ham og de øvrige medlemmer af "forskydningsgruppen", en kreds af ansatte ved ABK med interesse for beton og plasticitetsteori, for de mange inspirerende diskussioner, vi har haft.

Rapporten er maskinskrevet af Annebella Henriksen og Susanne Kjærgaard Nielsen. Figurerne er optegnet af Esther Martens. Alle takkes for et omhyggeligt udført arbejde.

Buddinge, juni 1983

Hans Exner

**Plasticitetsteori for Coulomb-materialer**

Copyright © by Hans Exner 1983

Tryk:

Afdelingen for Bærende Konstruktioner

Danmarks Tekniske Højskole

Lyngby

ISBN 87-87336-04-9





## Resumé

Denne rapport omhandler teoretisk bæreevnebestemmelse for primært todimensionale brudtyper, plan deformationstilstand eller rotationssymmetrisk tilstand, med ikke homogene spændingstilstande. Materialet er oftest beton, men også murværk er undersøgt. Endvidere er strømmingen i siloer behandlet. Behandlingen sker ved hjælp af plasticitetsteorien. Som flydebetingelse er for alle materialerne anvendt Coulomb's modificerede brudbetingelse.

Rapporten indledes med en generel, teoretisk del, hvori såvel enkelte flydelinjer som sliplinjefelter behandles.

Den næste del er anvendelser af teorien. Fælles for en del af eksemplerne er forskellige former for udpresning: Bæreevnen afhænger af nogle ydre geometriske fastholdelser, der gør trykket i det indre større end ved randene. Ved bruddet bevæges materialet mod randene.

Den sidste del af rapporten tager nogle af de materiale-mæssige forudsætninger op til revision. Deres indflydelse på bæreevnen undersøges, især med henblik på at finde modifikationer til plasticitetsteorien, som gør den anvendelig, også når ikke alle dens forudsætninger er opfyldt.

## Summary

In this report theoretical carrying capacities are found for two-dimensional problems, plane strain or rotational symmetrical situations, with none homogenous stress distributions. The material is most often concrete. However, brickwork and the flow in silo bins and hoppers are also treated. The calculations follow the theory of plasticity with Coulomb's modified yield condition.

The first part of the report is general and theoretical and deals with single yield lines as well as yield zones.

The second part contains applications of the theory. Some of the problems have in common that a mass is being pressed out. The carrying capacity thus depends on some geometrical limitations which create a greater pressure in the internal of the mass than near the free surfaces. When yielding the material moves against the edges.

In the last part of the report some of the assumptions concerning the material are being revised. Their influence on the carrying capacity is examined especially in attempt to find modifications to the theory of plasticity which make it usable also when some of its assumptions are not fulfilled.

## INDHOLDSFORTEGNELSE

1.	INDLEDNING	1
2.	PLASTICITETSTEORI	4
3.	COULOMB-MATERIALER	8
4.	LIGEVÆGT I PLAN TILSTAND	18
5.	SLIPLINJEFELTER	
5.1	Indledning	27
5.2	Beregning af sliplinjefelter	27
5.3	Rankine-felt	31
5.4	Prandtl-felt	33
5.5	Cykloidefelt	34
5.6	Indhyllingskurve i sliplinjefelt	36
5.7	Flytninger i sliplinjefelt	39
5.8	Spændingsdiskontinuitetslinje	40
5.9	Rotationssymmetriske felter.	43
5.10	Sliplinjefelter for modificeret Coulomb-materiale.	49
5.11	Hovedretninger ved delvist ru væg.	51
6.	ENKELTSLIPLINJER	
6.1	Indledning	54
6.2	Flytningsdiskontinuitetslinje	55
6.3	Stiftlegememekanisme. Muligheder og begrænsninger.	57
6.4	Ligevægtsflydelinjer i vægtløst materiale.	
6.4.1	Generelt	61
6.4.2	Coulomb-materiale	63
6.4.3	Hjørne på flydefladen	64
6.4.4	Polygonal flydeflade	67
6.4.5	Beton, plan spændingstilstand	70
6.4.6	Tresca-materiale i plan spændingstilstand	71
6.4.7	Krum flydeflade	72
6.4.8	Von-Mises materiale i plan spændingstilstand	72
6.4.9	Materiale med rette flydelinjer	76
6.5	Rumvægt	78

7.	TRYKSTYRKEN AF STÆNGER, CYLINDRE OG TERNINGER		12.	PROPPERS BÆREEVNE	
7.1	Indledning	80	12.1	Indledning	169
7.2	Plan tøjningstilstand	81	12.2	Endimensionale modeller	170
7.3	Rotationssymmetrisk tilstand	88	12.3	Plan deformationstilstand	174
7.4	Bæreevnen af en terning	94	12.4	Rotationssymmetrisk tilstand	185
			12.5	Eksempel	189
8.	SPALTNING		13.	SILOTRYK	
8.1	Indledning	96	13.1	Indledning	192
8.2	Øvreværdiløsning	96	13.2	Mulige beregningsmodeller	195
8.3	Korrekt løsning	98	13.3	Beregning af sliplinjefelter i siloen	200
8.4	Spalteforsøg på betoncylindre	100	13.4	Tragtstrømning	212
			13.5	Konklusion	214
9.	KONCENTREREDE KRÆFTER PÅ BETONPRISMER		14.	RUMLIGE STIFTLEGEMEBEVÆGELSER	
9.1	Indledning	104	14.1	Indledning	215
9.2	Øvreværdiløsninger	105	14.2	Flydeflader i ægte Coulomb-materiale	216
9.3	Den korrekte løsning	112	14.3	Flydeflader i modificeret Coulomb-materiale	228
9.4	Forsøgsresultater	116	14.4	Konklusion	233
9.5	Skrå belastning. Armeret prisme	117			
10.	FORANKRING		15.	EFFEKTIVITET VURDERET UD FRA ARBEJDSKURVE	
10.1	Indledning	119	15.1	Indledning	234
10.2	Plan deformationstilstand	123	15.2	Plastiske sikre arbejdskurver	235
10.3	Rotationssymmetrisk tilstand	131	15.3	Effektivitetsfaktoren for beton	238
10.4	Lang, rund forankring	134			
10.5	Delvist ru jern	145	16.	NORMALITETSBETINGELSEN	
10.6	Sammenligning med DS411	148	16.1	Indledning	241
			16.2	Eksempler	243
11.	MURVÆRK		16.3	Konklusion	249
11.1	Indledning	150	17.	KONKLUSION	250
11.2	En simpel øvreværdi	151			
11.3	Forankring af fugen. Nedreværdi	153	18.	SYMBOLLISTE	252
11.4	Forankring af fugen. Korrekt løsning	157			
11.5	Forankring af stenen	160	19.	REFERENCER	254
11.6	Materialernes styrkeparametre	164			
11.7	Forsøgsresultater	167			

## 1. Indledning

Bæreevnebestemmelser sker traditionelt på grundlag af enten elasticitetsteorien eller plasticitetsteorien. Valget er truffet, som det skønnes mest rimeligt eller hensigtsmæssigt. Denne rapport handler om bæreevnebestemmelse ved hjælp af plasticitetsteorien. Her skal nævnes nogle fordele og ulemper ved denne.

For at kunne bestemme en bæreevne ved hjælp af plasticitetsteorien kræves der kun kendskab til de materialeparametre, der er primære i denne henseende, nemlig "brudspændingerne". Andre størrelser, der har en mindre indflydelse, f.eks. de elastiske begyndelsesstivheder, indgår ikke i beregningerne. Hermed stilles altså det mindst mulige krav til målinger på det materiale, der anvendes.

Plasticitetsteorien er generel, idet den kan give svar på mange forskellige bæreevneproblemer, også problemer med f.eks. en kompliceret geometri.

Plasticitetsteorien kan anvendes meget fleksibelt afhængigt af den aktuelle opgave. Mens der ved andre bæreevneberegningismetoder principielt kun kendes "den rigtige løsning", giver plasticitetsteorien mulighed for beregning af tilnærmede løsninger på både den sikre og den usikre side. Hermed er det muligt at afpasse beregningsindsatsen efter behovet for nøjagtighed på resultatet. I tilfælde, hvor der kun er behov for et groft skøn af bæreevnen, er det altså muligt at opnå dette uden et meget stort arbejde.

Plasticitetsteorien er rationel og overskuelig. Den bygger på et klart sæt af forudsætninger om materialernes og belastningens virkemåde. Ved uoverensstemmelser mellem teoriens forudsigelser og virkeligheden er det derfor let at forklare disse og indføre korrektioner i beregningerne.

Der er naturligvis også ulemper ved plasticitetsteorien. Disse er først og fremmest, at teorien stiller krav om nogle bestemte egenskaber hos de materialer, der indgår. Visse materialer, f.eks. beton, er ret langt fra at opfylde disse plasticitetskrav, mens andre, f.eks. stål og jord, opfylder kravene i højere grad. Det har dog vist sig, at teorien kan benyttes alligevel med godt resultat, når der indføres passende modifikationer af materialernes egenskaber.



En anden ulempe ved plasticitetsteorien i sin simpleste form er, at den kun finder bæreevnen af en konstruktion, mens dennes deformationer ikke bestemmes. Heraf følger også, at konstruktioner, hvis bæreevne er stærkt afhængig af deres deformationer, ikke kan behandles. Dette gælder geometriske stabilitetsproblemer, dvs. problemer, hvor konstruktionens deformationer kan blive "store" ved et bestemt lastniveau, uden at spændingerne nødvendigvis har nået brudspændingerne. Det gælder også shake down-problemer, hvor en last veksler mange gange mellem to niveauer evt. med hver sit fortegn. Her kan de begrænsede flydninger, der fås ved hver enkelt lastpåførsel, tilsammen give en ubegrænset deformation, uden at konstruktionens engangs-bæreevne nogen sinde har været påført.

I praksis anvendes plasticitetsteorien på flere forskellige måder. Den anvendes naturligvis på tilfælde, hvor den eksakte teoretiske løsning på problemet er fundet, og hvor denne kan udtrykkes i simple formler til håndregning. Der findes adskillige af denne slags tilfælde.

Teorien anvendes også i situationer, hvor den eksakte løsning ikke er kendt, enten fordi det ikke er lykkedes at finde den, eller fordi beregningerne ville blive så lange, så det synes rimeligere at anvende en simplere løsning med en vis unøjagtighed. En sådan simplere (teknisk) løsning kan repræsentere den korrekte løsning på et problem med en lidt ændret geometri, eller den kan være løsningen beregnet på basis af et bestemt udvalgt "kritisk snit".

Endelig anvendes plasticitetsteorien til opbygning af systematiske, numeriske EDB-metoder, elementmetoder. Her opnås en tilnærmelse til den teoretisk korrekte løsning, hvor fejlen afhænger af antallet af elementer i beregningen. Fejlen kan principielt reduceres vilkårligt ved at forøge elementantallet.

Hovedinteressen i denne afhandling ligger mellem den første og den anden af disse anvendelser.

Coulomb-materialer er materialer, som følger Coulomb's flydebetingelse. Denne blev først anvendt for jord, hvor den bruges til vurdering af skrånters stabilitet, trykket på støttevægge og bæreevnen af fundamenter. Betingelsen bruges også for andre granulære medier, f.eks. i siloer eller på andre opbevaringssteder. Et specialtilfælde

af betingelsen er Tresea's flydebetingelse, der kan bruges for stål. Som den nyeste anvendelse bruges Coulomb's flydebetingelse nu også for beton. De fleste af afhandlingens eksempler er for dette materiale.

Sliplinjefelter er et matematisk værktøj, som er kendt fra geoteknikken. Det kan beskrives som en todimensional anvendelse af f.eks. Coulomb's flydebetingelse ved varierende spændingstilstande. Sliplinjefelterne er her anvendt til løsning af nogle bæreevneproblemer for betonkonstruktioner.

I almindelig projekteringspraksis er sliplinjefelterne nok for uhåndterlige til at blive benyttet. De kan dog anvendes til at finde og justere simplere, tilnærmede løsninger og til at kontrollere EDB-beregningsmetoder. Det har endvidere almindelig forskningsmæssig interesse, at metoderne, som er kendt fra geoteknikken, også kan anvendes inden for bygningsingeniørens arbejdsområde, samt at opbygge en vis mængde af principielt kendte løsninger.

## 2. PLASTICITETSTEORI

Plasticitetsteorien er det teoretiske grundlag for "brudberegninger", dvs. beregninger, hvor bæreevnen ved engangsbelastning af en konstruktion bestemmes udelukkende ved betragtning af spændingerne ved brud og tillægsdeformationerne ved bruddet. Der ses altså bort fra belastningshistoriens indflydelse og fra indflydelsen af deformationerne før bruddet. De områder af konstruktionen, hvor der ikke er brud, antages heller ikke at have indflydelse på bæreevnen.

Forudsætningen for, at disse beregninger rigtigt anvendt giver den korrekte bæreevne af statisk ubestemte konstruktioner, er, at de indgående materialer er idealt plastiske.

Betingelserne for det idealt plastiske materiale opbygges ud fra det virtuelle arbejdes princip. Der skal være givet et sæt spændinger  $\bar{\sigma}$  og tilhørende tøjninger  $\bar{\epsilon}$ , så deres skalære produkt er lig med det indre virtuelle arbejde ved en deformation. Materialets styrke beskrives nu ved en funktion af spændingernes øjeblikkelige værdier og nogle materialekonstanter,  $f(\bar{\sigma})$ , hvor uligheden  $f(\bar{\sigma}) \leq 0$  beskriver de mulige spændingstilstande. Ligningen  $f(\bar{\sigma}) = 0$  bestemmer en (hyper-)flade i spændingsrummet, den såkaldte flydeflade, som forudsættes konveks. Flydebetingelsen siger da, at der kun kan forekomme plastiske deformationer, hvis spændingspunktet ligger på flydefladen.

Ikke alle deformationer kan dog forekomme svarende til et bestemt spændingspunkt. De mulige deformationer fastlægges af den såkaldte flydelov. En vigtig flydelov er den associerede flydelov, også kaldet normalitetsbetingelsen, som siger, at de plastiske tøjningstilvækster skal være et positivt tal gange flydefladens udadrettede normalvektor i det aktuelle spændingspunkt, dvs.

$$\Delta \bar{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0$$

Disse vilkårligt store deformationer skal kunne ske, uden at spændingerne ændrer sig.

For at nå frem til de praktiske anvendelser af teorien gøres ofte endnu en forudsætning, som kan opstilles på to forskellige måder, på materialeniveau eller på konstruktionsniveau. I det første tilfælde forudsættes materialet at være stift-plastisk, dvs. at det slet ikke kan deformeres, før det flyder. I det andet tilfælde findes der elastiske deformationer, men de antages at være så små, at ligevægtsligningerne ved flydebruddets start kan opstilles i det udeformerede system.

Da stift-plastiske materialer ikke findes, er ingen af forudsætningerne opfyldte, men de repræsenterer to måder, hvor på det siges, at de elastiske deformationer kan negligeres i forhold til de plastiske. Heraf følger, at elastiske stabilitetssvigt ikke behandles.

Med en af de to forudsætninger kan man for en konstruktion bestående af et eller flere plastiske materialer med de associerende flydelove vise de tre flydelastsætninger, øvreværdisætningen, nedreværdisætningen og entydighedssætningen, som bl.a. udtrykker, at konstruktionen vil gøre "så stor modstand som muligt" mod de påførte belastninger og deformationer.

Flydelasten defineres som den positive faktor, man skal multiplicere et givet sæt belastninger med, for at deformationerne kan øges, uden at belastningen øges. Bæreevnen regnes herved for udtømt (nået). Belastningen skal påføres som proportionalt voksende belastning. Der kan dog være yderligere en konstant belastning (f.eks. egenvægt). Det må da forudsættes, at konstruktionen ikke er i flydning ved belastningens start.

### Øvreværdisætningen

Ved den specifikke dissipation forstås det maksimale indre arbejde for en given deformation, dvs.

$$d(\bar{\epsilon}) = \max_{\bar{\sigma}} (\bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon}), \quad f(\bar{\sigma}) \leq 0$$

Den totale dissipation fås ved at integrere dette over konstruktionen:

$$D = \int_V d\bar{\epsilon} dV$$

En mekanisme er et flytningsfelt, som overholder de geometriske randbetingelser og eventuelle betingelser på de tilhørende tøjninger, f.eks. usammentrykkelighed. For en given mekanisme beregnes den totale dissipation  $D$  og de ydre kræfters arbejde  $A_y$ . Øvreverdisætningen siger nu, at den værdi af belastningen, der fås ved at sætte  $D$  lig med  $A_y$ , ligger på den usikre side eller er lig med konstruktionens bæreevne.

#### Nedreværdisætningen

En spændingsfordeling, som overalt opfylder ligevægtsligningerne og de statiske randbetingelser, kaldes en statisk tilladelig spændingsfordeling.

En spændingsfordeling, for hvilken flydebetingelsen intet sted i konstruktionen er overskredet, kaldes en sikker spændingsfordeling.

Nedreværdisætningen siger, at en værdi af belastningen, for hvilken der overalt i konstruktionen kan angives en sikker, statisk tilladelig spændingsfordeling, ikke er større end konstruktionens bæreevne. Den giver således en værdi på den sikre side.

#### Entydighedssætningen

Entydighedssætningen siger, at hvis konstruktionen har en bæreevne, så er denne entydigt bestemt af geometrien og de plastiske egenskaber. Den er lig med den største nedreværdi og den mindste øvreverdi.

Det interessante heri er, at konstruktionens bæreevne er uafhængig af elastiske deformationer, egenspændinger m.v.

Selv om konstruktionens bæreevne således er entydigt bestemt, er dens spændinger og flytninger det dog ikke nødvendigvis overalt. Det kan imidlertid vises, at på steder, hvor der i alle til den korrekte løsning hørende mekanismer er plastiske tøjninger forskellige fra nul, er spændingerne entydigt bestemt. Har man fundet en korrekt løsning på et problem, vil de fundne spændinger altså også være de korrekte i de områder, hvor der nødvendigvis er plastiske tøjninger. Disse "hårdest belastede" steder er de "kritiske snit" i konstruktionen.

Hvis man har fundet en nedreværdiløsning på et problem og mener, at løsningen giver den korrekte bæreevne, er det tilstrækkeligt for at vise dette at påvise, at der findes en mekanisme, der svarer til de fundne spændinger. Dissipationen må intet sted i konstruktionen være negativ, og de ydre kræfter skal udføre et positivt arbejde. Øvreverdideregningen for denne mekanisme bliver da blot det virtuelle arbejdes princip for de fundne sikre og statisk tilladelige spændinger, og den giver derfor den allerede fundne bæreevne. Da denne således både er en øvre- og nedreværdi, er den lig med den korrekte bæreevne.

En konstruktion består af en sammenbygning af flere materialer med en given geometri. Det er ofte ønskeligt at udtrykke dens bæreevne ved nogle andre parametre end de grundliggende spændinger, f.eks. snitkræfter. Hvis alle de indgående materialer er idealt plastiske og følger den associerede flydelov, vil dette også gælde for den flydeflade, der fås ved at udtrykke bæreevnen i de afledte snitkræfter. Man kan med andre ord foretage beregningerne på det niveau, man selv ønsker; de generelle metoder, man kan anvende, vil være nøjagtig de samme.

### 3. Coulomb-materialer.

Coulomb-materialer er opkaldt efter den franske ingeniør C.A. Coulomb [1773], som antog, at forskydningsspændingen  $\tau$  i et brudsnit var en lineær funktion af normalspændingen  $\sigma$ , dvs.

$$|\tau| = c - \sigma \tan \varphi \quad (3.1)$$

hvor cohæsionen  $c$  og friktionsvinklen  $\varphi$  er materialekonstanter. Da normalspændinger her regnes positive som træk, og forskydningsbæreevnen vokser med trykket, er der et minus på det sidste led i (3.1).

På figur 3.1 er i Mohr's  $\sigma\tau$ -plan indtegnet de to linjer givet ved (3.1). På figuren er også indtegnet en cirkel repræsenterende spændingstilstanden i et punkt i flydning. Ifølge flydebetingelsen skal cirklen tangere linjerne. Idet hovedspændingerne er prioriteret  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , ses det, at cirklen er bestemt af  $\sigma_1$  og  $\sigma_3$ . Ved projektion på en radius vinkelret på en af linjerne med ligning (3.1) fås

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \varphi - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi$$

$$\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_1 - \sigma_3 - \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} c = 0$$

$$k \sigma_1 - \sigma_3 - f_c = 0 \quad (3.2)$$

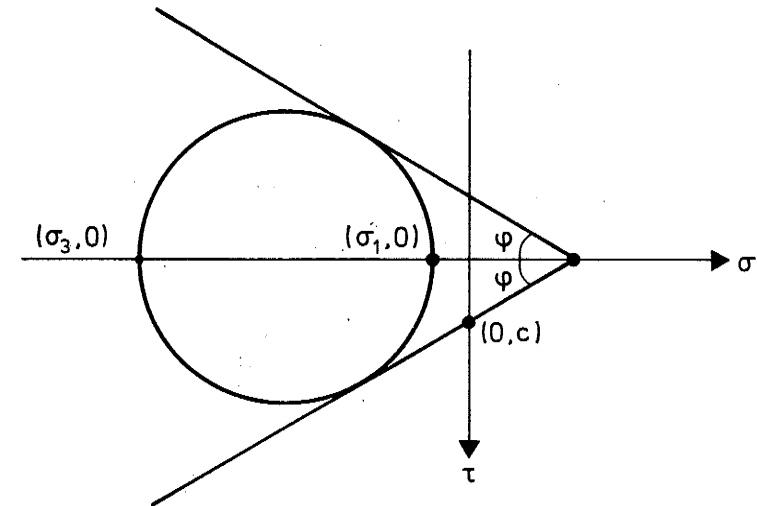
hvor vi har indført

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \left( \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 = \left( \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^2 \quad (3.3)$$

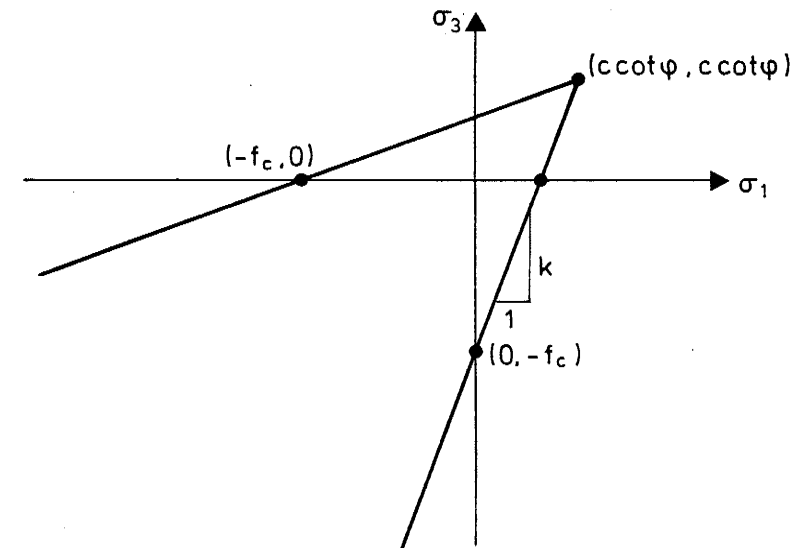
$$f_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = 2\sqrt{k} c \quad (3.4)$$

$f_c$  er den enaksede trykstyrke.

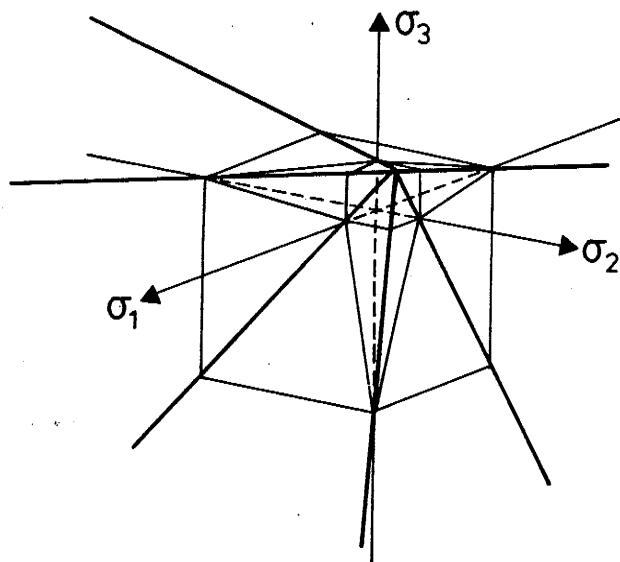
På figur 3.2 er indtegnet linjen svarende til (3.2) og den dermed symmetriske linje ved ombytning af  $\sigma_1$  og  $\sigma_3$ . I det tredimensionale  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -rum bliver flydefladen en sekssidet pyramide med spidsen i  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot \varphi$  som vist på figur 3.3.



Figur 3.1 Coulombs flydebetingelse i Mohr's plan.



Figur 3.2 Coulombs flydebetingelse i hovedspændingsplanen.



Figur 3.3 Coulombs flydebetingelse i det tredimensionale hovedspændingsrum.

Det fremgår af figur 3.2, at den enaksede trækstyrke er  $\frac{f_c}{k}$ , og den treaksede trækstyrke er  $\frac{f_c}{k-1}$ . Mange materialer har ikke en så stor trækstyrke, og spidsen afskæres da på figur 3.2 af linjerne

$$\sigma_1 - f_t = 0 \quad (3.5)$$

og den tilsvarende symmetriske. Det herved fremkomne materiale kaldes et modificeret Coulomb-materiale. Modifikationen medfører, at figur 3.1 ændres til figur 3.4, hvor spidsen er erstattet af en cirkelbue gennem  $(f_t, 0)$ . I den tredimensionale afbildning fås en afskæring med yderligere tre planer, se figur 3.6.

Hvis spændingspunktet ligger på den ved (3.2) givne linje, fås tøjningerne

$$\epsilon_1 = k\lambda_1, \epsilon_2 = 0, \epsilon_3 = -\lambda_1, \lambda_1 > 0 \quad (3.6)$$

Ved trækbruddet fås

$$\epsilon_1 = \lambda_2, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0, \lambda_2 > 0 \quad (3.7)$$

I de to tilfælde haves henholdsvis

$$\frac{\sum \epsilon}{\sum |\epsilon|} = \sin \varphi \text{ og } \frac{\sum \epsilon}{\sum |\epsilon|} = 1$$

Deformation er altså kun mulig, hvis

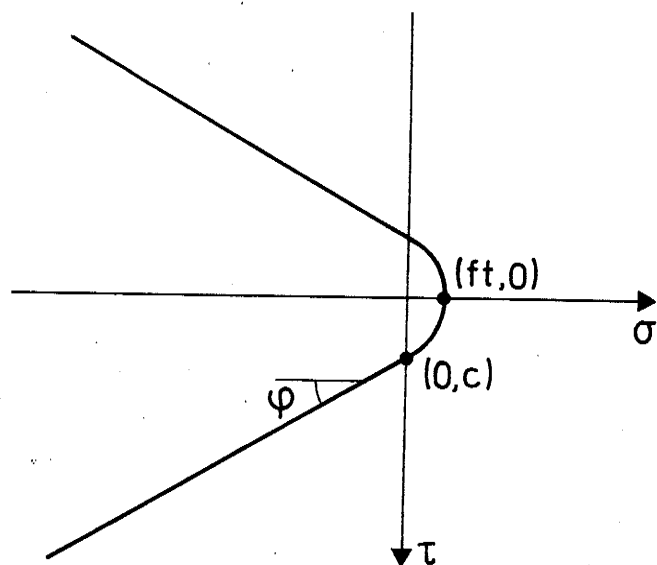
$$\frac{\sum \epsilon}{\sum |\epsilon|} \geq \sin \varphi \quad (3.8)$$

Følgende udtryk for den specifikke dissipation viser sig at gælde i begge tilfælde:

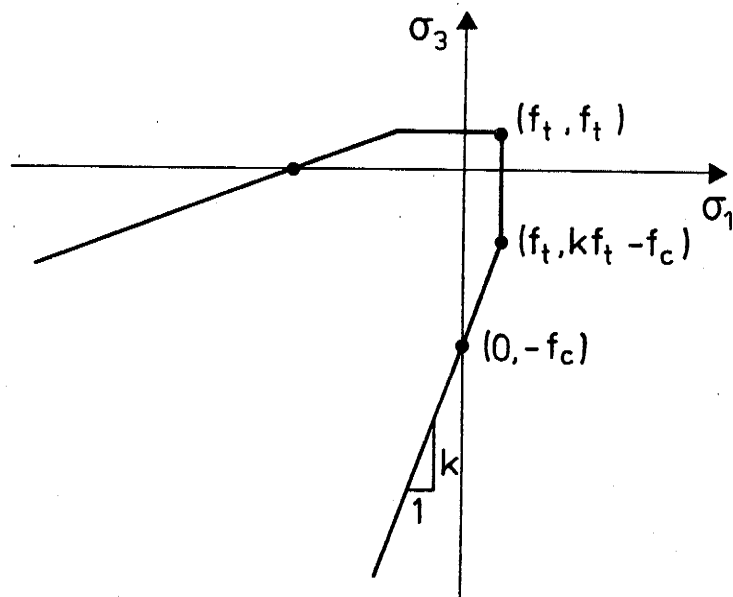
$$d = \frac{1}{2} f_c (\lambda \sum |\epsilon| - \mu \sum \epsilon) \quad (3.9)$$

$$\lambda = 1 - (k-1) \frac{f_t}{f_c}; \quad \mu = 1 - (k+1) \frac{f_t}{f_c} \quad (3.10)$$

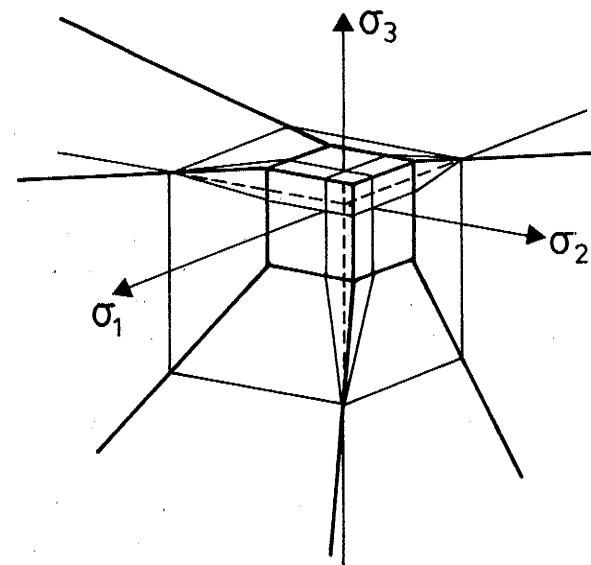




Figur 3.4 Coulombs modificerede flydebetingelse i Mohr's plan.



Figur 3.5 Coulombs modificerede flydebetingelse i hovedspændingsplanen.



Figur 3.6 Coulombs modificerede flydebetingelse i det tre-dimensionale hovedspændingsrum.

Om deformationerne i det "ægte" Coulomb-materiale, dvs. hvor trækstyrken ikke har indflydelse, ses af (3.6), at

$$\epsilon_1 = -k \epsilon_3, \epsilon_1 > 0 \quad (3.11)$$

Dette medfører, at længdetøjningen bliver nul i de retninger, der danner vinklerne  $\pm(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  med første hovedretning. Disse retninger er netop de snit, hvor spændingerne opfylder Coulombs brudbetingelse (3.1), så disse brudretninger har altså netop den egenskab, at deres længdetøjning ved en plastisk deformation er nul.

En lettelse ved den praktiske beregning af dissipationen skal omtales her.

Hvis friktionsvinklen  $\phi$  er større end nul, vil materialet udvide sig ved en plastisk deformation. Volumenudvidelsen pr. volumenenhed, dilatationen, er summen af hovedtøjningerne

$$\Delta V = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (3.12)$$

For det ægte Coulomb-materiale kan dissipationen ved hjælp af (3.6), (3.9) og (3.10) udtrykkes ved  $\Delta V$ :

$$d = \frac{f_c}{k-1} \Delta V \quad (3.13)$$

Da den specifikke dissipation således er proportional med dilatationen, er det nemt at beregne den totale dissipation i et område, hvis flytningerne her er kendte; den er

$$D = \frac{f_c}{k-1} \Delta V \quad (3.14)$$

hvor  $\Delta V$  er den totale volumenudvidelse ved deformationen.  $\Delta V$  kan beregnes direkte af flytningerne af områdets rande. Formlerne (3.13) og (3.14) gælder kun for ægte Coulomb-materialer. For det modificerede Coulomb-materiale er højresiden større end venstresiden, og formlerne ville derfor give for store værdier. Generelt gælder

$$f_t \Delta V \leq d \leq \frac{f_c}{k-1} \Delta V \quad (3.15)$$

hvis tøjningerne kan få bidrag fra både (3.6) og (3.7).

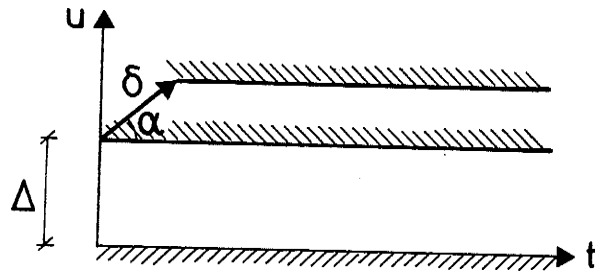
### Flytningsdiskontinuitetslinjer

Ved beregninger af plane konstruktioner efter plasticitetsteorien anvendes ofte flytningsdiskontinuitetslinjer, de såkaldte flydelinjer. En flydelinje kan beskrives således: Omkring flydelinjen lægges en strimmel af bredden  $\Delta$ . Uden for denne strimmel er tøjningerne nul, men den ene del translateres som et stift legeme i forhold til den anden. Flytningsdiskontinuiteten beskrives ved dens størrelse  $\delta > 0$  og dens vinkel med sribens længderetning  $\alpha$ , positiv som en fjernelse af de to dele fra hinanden. Der antages en homogen tøjningstilstand i sriben, som i det på figur 3.7 viste  $tn$ -koordinatsystem er

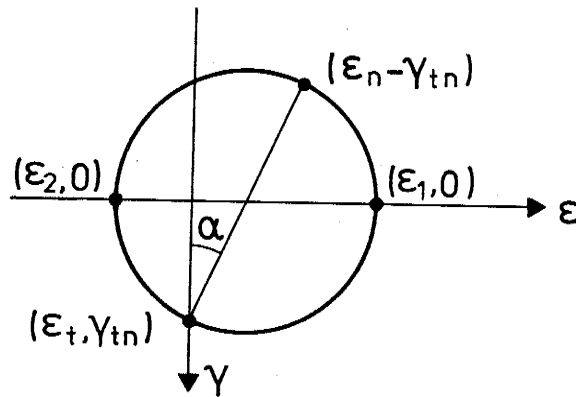
$$\epsilon_t = 0; \epsilon_n = \frac{\delta}{\Delta} \sin \alpha; \gamma_{nt} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} \cos \alpha \quad (3.16)$$

Det ses ved afbildning i Mohr's plan for tøjninger på figur 3.8, at vinklen fra første hoved-(træk-)tøjning til flydelinjens normal er  $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ , dvs. at første hovedtøjningsretning halverer vinklen mellem flytningsretningen og den flydelinjenormal, som peger ind i det legeme, hvis relative flytning angives. Hovedtøjningerne fås af Mohr's plan:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\delta}{2\Delta} (\sin \alpha + 1) > 0 \\ \epsilon_2 &= \frac{\delta}{2\Delta} (\sin \alpha - 1) < 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$



Figur 3.7 Flytninger ved en flytningsdiskontinuitetslinje.



Figur 3.8 Tøjninger ved en flytningsdiskontinuitetslinje.

Den specifikke dissipation kan nu findes ved indsættelse i (3.9). Idet der samtidig integreres over strimlens bredde fås

$$d_k = \frac{\delta f_c}{2} (\lambda - \mu \sin \alpha) \quad (3.18)$$

Betingelsen (3.8) bliver her til kravet, at  $\alpha \geq \varphi$ .

Ved tredimensionale konstruktioner kan flytningsdiskontinuitetsflader anvendes på analog måde. Strimlen bliver her et tyndt lag af bredden  $\Delta$ . Da  $\Delta$  er lille i forhold til alle længder i konstruktionen, vil der i laget overalt være plan deformationstilstand i en plan udspændt af flytningsdiskontinuitetsvektoren og flytningsdiskontinuitetsfladens normal. Det udtryk for dissipationen, der gælder ved plan deformationstilstand, gælder derfor også her.

#### 4. Ligevægt i plan tilstand.

I dette kapitel betragtes et mere generelt såkaldt Mohr-materiale, dvs. et materiale, hvis flydebetingelse kan angives som en konveks kurve i Mohr's plan for spændinger, den i litteraturen omtalte "Mohr's indhyllingskurve" (eng. envelope). Kurven beskrives her ved funktionen  $r = r(s)$ , hvor  $s$  er koordinaten til centrum for Mohr's cirkel, positiv som tryk, og  $r$  er radius i den cirkel, som tangerer flydekurven, se figur 4.1.

Det modificerede Coulomb materiale er et specialtilfælde heraf, nemlig

$$r = \begin{cases} c \cos \varphi + s \sin \varphi, & s \geq \frac{c \cos \varphi - f_t}{1 - \sin \varphi} \\ f_t + s, & \frac{c \cos \varphi - f_t}{1 - \sin \varphi} \leq s \leq -f_t \end{cases} \quad (4.1)$$

Der betragtes en plan tilstand, og flydebetingelsen givet i de to hovedspændinger fremgår af figur 4.2.

Da kurven på figur 4.1 skal være konveks, skal det gælde, at

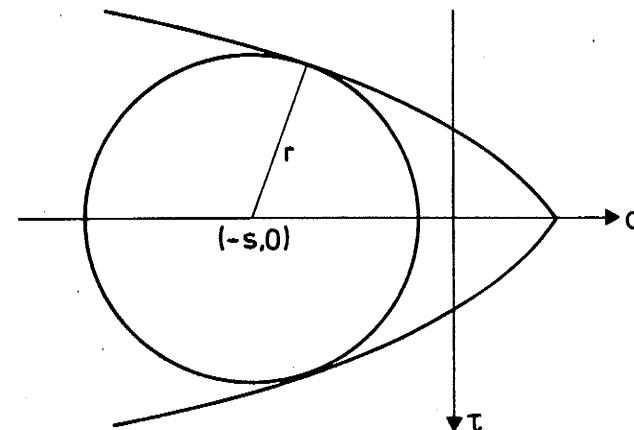
$$|r'(s)| \leq 1 \quad (4.2)$$

Dette medfører, at kurven på figur 4.2 overalt har tangenter, som enten er parallelle med en af akserne eller har en positiv hældningskoefficient.

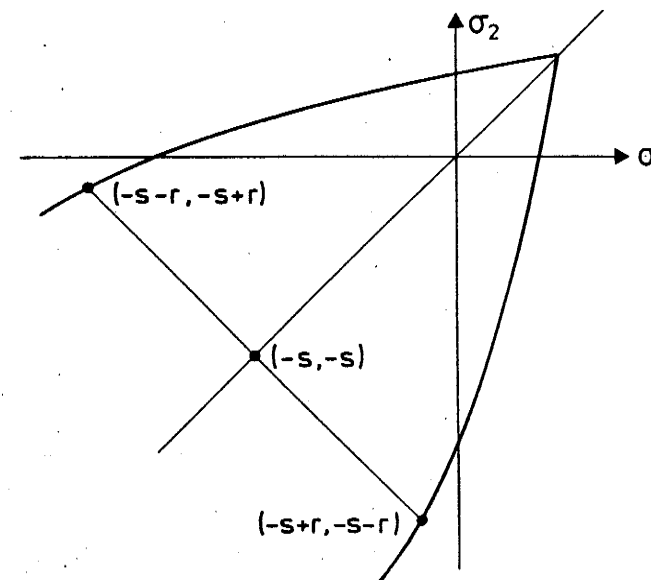
Til beskrivelse af spændingerne i et punkt indføres nu retningsvinklen for første hovedspændingsretning  $\theta$  og forholdet  $\beta$  mellem radius af den aktuelle Mohr'ske cirkel og  $r$ . Spændingerne kan nu skrives

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -s + r\beta \cos 2\theta \\ \sigma_y &= -s - r\beta \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= r\beta \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

hvor  $s$ ,  $\theta$  og  $\beta$  er funktioner af  $x$  og  $y$ .



Figur 4.1 Flydebetingelse for et Mohr-materiale i Mohr's plan.



Figur 4.2 Flydebetingelse for et Mohr-materiale i hovedspændingsplanen.

Om  $\beta$  gælder

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta < 1 &: \text{ikke flydning} \\ \beta = 1 &: \text{flydning} \\ \beta > 1 &: \text{umuligt} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Volumenlasten beskrives ved dens komponenter i x- og y- retningen,  $\gamma_x$  og  $\gamma_y$ . Ligevægtsligningerne lyder:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma_y = 0$$

Heri indsættes (4.3):

$$\begin{aligned} (-1+r'\beta \cos 2\theta)s_x - 2r\beta \sin 2\theta \theta_x + r\beta_x \cos 2\theta \\ + r'\beta \sin 2\theta s_y + 2r\beta \cos 2\theta \theta_y + r\beta_y \sin 2\theta + \gamma_x = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} (-1-r'\beta \cos 2\theta)s_y + 2r\beta \sin 2\theta \theta_y - r\beta_y \cos 2\theta \\ + r'\beta \sin 2\theta s_x + 2r\beta \cos 2\theta \theta_x + r\beta_x \sin 2\theta + \gamma_y = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Her betyder index x henholdsvis y på s,  $\theta$  eller  $\beta$  partiel differentiation med hensyn til x henholdsvis y.

Der indføres vinklen  $\phi$  gennem ligningen

$$\sin \phi = r'\beta \quad (4.7)$$

For  $\beta = 1$ , dvs. ved flydning, er denne vinkel lig med hældningsvinklen for flydekurven i Mohr's plan, dvs. friktionsvinklen, der for et Mohr-materiale kan variere med trykniveauet.

Hvis  $\beta$  antages kendt, haves nu to partielle differentiaalligninger til bestemmelse af s og  $\theta$ , dvs. til at finde spændingerne. Hvis  $|r'\beta| < 1$ , udgør de et hyperbolsk partielt differentiaalligningssystem. Det har karakteristiktreningsvinklerne  $\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$  og

$\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ , som benævnes henholdsvis første eller a-linjeretningen og anden eller b-linjeretningen.

Ved multiplikation af (4.5) med  $\sin(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  og af (4.6) med  $-\cos(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  og addition fås

$$\cos \phi s_{\lambda 1} + 2r\beta \theta_{\lambda 1} = r\beta_{n1} + \gamma_{n2}$$

Her angiver index projektningsretning, for s,  $\theta$  og  $\beta$  af gradienten, for  $\gamma$  af vektoren  $(\gamma_x, \gamma_y)$ . Retningsvinklerne er vist på figur 4.3. På tilsvarende måde fås ved multiplikation af (4.5) med  $\sin(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$  og af (4.6) med  $-\cos(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$  og addition

$$\cos \phi s_{\lambda 2} - 2r\beta \theta_{\lambda 2} = r\beta_{n2} + \gamma_{n1}$$

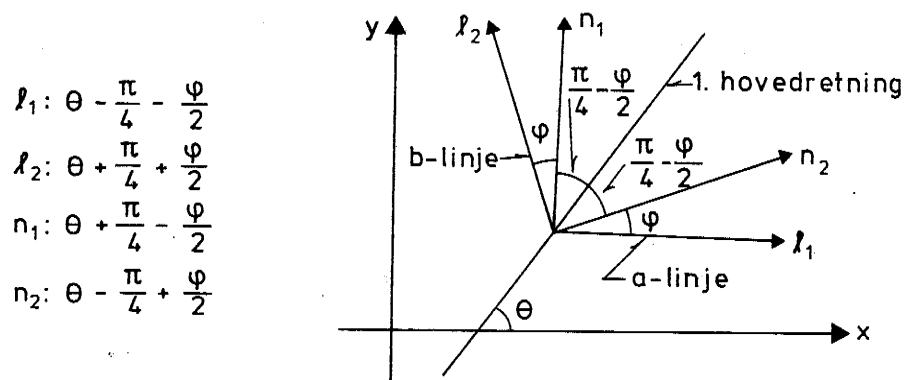
Venstresiderne i hver af disse to ligninger angiver kun afledede i retning af én karakteristisk, dvs. at variationen kan skrives

$$\begin{aligned} \cos \phi ds + 2r\beta d\theta &= (r\beta_{n1} + \gamma_{n2})dl_1 \text{ langs en a-linje} \\ \cos \phi ds - 2r\beta d\theta &= (r\beta_{n2} + \gamma_{n1})dl_2 \text{ langs en b-linje} \end{aligned} \quad (4.8)$$

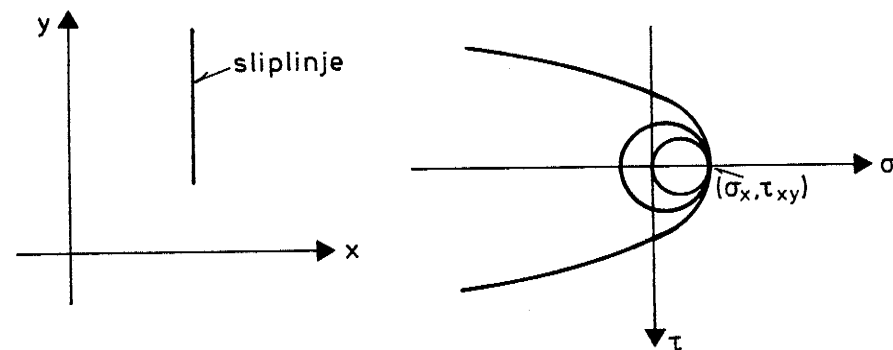
Hvis  $\beta = 1$  langs en karakteristisk, er karakteristiktreningen også retningen af det snit, langs hvilket den Mohr'ske flydebetingelse på  $(\sigma, \tau)$  er opfyldt. Karakteristikken er da en såkaldt sliplinje. Langs en sliplinje er der mulighed for plastiske deformationer.

Hvordan kan  $\beta$  variere i omegnen af en sliplinje? Det antages først, at sliplinjen ikke er en spændingsdiskontinuitetslinje. Omkring et stykke af sliplinjen indlægges et xy-koordinatsystem med y-aksen parallel med sliplinjen, se figur 4.4. Spændingerne i et punkt på sliplinjen afbildes i Mohr's plan. Punktet  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  ligger på flydekurven.  $\tau_{xy}$  skal være kontinuert over sliplinjen. Da sliplinjen ikke er en spændingsdiskontinuitetslinje, er også  $\sigma_y$  kontinuert over sliplinjen.

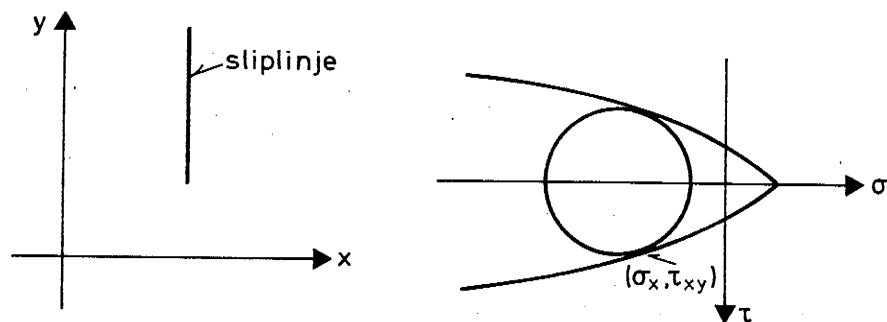




Figur 4.3 Retninger af karakteristikker og normaler.



Figur 4.5 Variation af  $\varphi$  omkring en sliplinje, som også er en spændingsdiskontinuitetslinje.



Figur 4.4 Variation af  $\varphi$  omkring en sliplinje, som ikke er en spændingsdiskontinuitetslinje.

Heraf følger, at deres afledede med hensyn til  $y$ ,  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$  og  $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$ , også må være kontinuerte over sliplinjen. Antages det nu, at også rumvægten ( $\gamma_x, \gamma_y$ ) er kontinuert over sliplinjen, hvilket er en betingelse for anvendelsen af (4.8), ses af ligevægtsligningerne

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma_y = 0$$

at  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  og  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$  også må være kontinuerte over sliplinjen.

Afsættes vektoren  $(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x})$  ud fra punktet  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  i Mohr's plan, figur 4.4, ses det, at denne vektor enten må være nulvektoren eller en tangentvektor til flydekurven i  $(\sigma_x, \tau_{xy})$ , thi ellers vil spændingspunktet  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  på en af sliplinjens sider ligge uden for flydekurven. Dette medfører, at  $\beta$  ikke kan aftage proportionalt med afstanden til sliplinjen på nogen side af den, dvs. at  $\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$  i punkter på sliplinjen.

Sliplinjen kan i et specielt tilfælde være en spændingsdiskontinuitetslinje. Tegnes de to cirkler i Mohr's plan, der repræsenterer spændingerne på hver side af sliplinjen, skal det punkt, der repræsenterer spændingerne på sliplinjen, ligge på begge cirkler og på den konvekse flydekurve. Da cirklerne ikke må skære flydekurven, er dette kun muligt, ved at de to cirkler, af hvilke den ene skal ligge inden i den anden, tangerer hinanden og flydekurven i et punkt på  $\sigma$ -aksen, se figur 4.5. Hertil kræves altså af flydekurven, at den skærer  $\sigma$ -aksen med lodret tangent, og at den her har en krumningsradius, der er forskellig fra nul. I dette tilfælde er det tilstrækkeligt at se på den ene ligevægtsligning

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma_x = 0$$

Som før medfører kontinuitet i  $\gamma_x$  og  $\tau_{xy}$  over linjen, at  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  må være kontinuert over linjen. Ligeledes indses, at  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  må være nul, da flydebetingelsen ellers overskrides på den ene side af sliplinjen, så også her gælder altså  $\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$  på sliplinjen.

De i karakteristikligningerne indgående størrelser  $\beta_{n1}$  og  $\beta_{n2}$  må da begge være nul langs sliplinjer, så her reduceres karakteristikligningerne (4.8) altså til sliplinjeligningerne

$$\cos \varphi \, ds + 2r d\theta = \gamma_{n2} \, dl_1 \text{ langs en a-sliplinje} \quad (4.9)$$

$$\cos \varphi \, ds - 2r d\theta = \gamma_{n1} \, dl_2 \text{ langs en b-sliplinje}$$

Her beskriver  $r = r(s)$  som nævnt flydefladen, jvf. figur 4.1 og 4.2, og  $\varphi$  er indført gennem ligningen

$$\sin \varphi = r' \quad (4.10)$$

Det bemærkes, at (4.9) er de samme ligninger som dem, man får ved at forudsætte flydebetingelsen opfyldt overalt i et område med en endelig udstrækning i flere retninger, et sliplinjefelt. For et Coulomb-materiale kaldes de Kötter's ligninger. Hermed er altså vist, at ligningerne gælder uændret, selv om der eventuelt ikke er flydning i punkter uden for den betragtede flydelinje.

### Tøjninger

Flydekurven for  $\sigma_1 > \sigma_2$  på figur 4.2 har parameterfremstillingen

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (-s+r, -s-r)$$

Kurvens hældningskoefficient er

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} = \frac{-1-r'}{-1+r'} = \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}$$

Ifølge normalitetsbetingelsen skal hovedtøjningerne derfor opfylde

$$\epsilon_1 = - \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \epsilon_3 > 0$$

Længdetøjningen af sliplinjeretningerne, som ifølge figur 4.3 danner vinklerne  $\pm(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$  med første hovedretning, findes heraf at være nul. Sliplinjerne får hermed betydning for tøjningsmulighederne, idet der kun er mulighed for tøjningsfelter, hvor sliplinjerne intet sted ændrer længde.

Tøjningerne skal dog også have sådanne fortegn, at dissipation overalt bliver positiv. Geometrisk betyder dette, at vinklen fra en a-linje til en b-linje formindskes. Hvis  $\varphi$  er positiv, er denne vinkel stump, og det betyder, at der sker en volumenforøgelse ved deformationen.

## 5. Sliplinjefelter

### 5.1 Indledning

Sliplinjefelter hører til de klassiske teoretiske beregningsmetoder for geotekniske problemer og for metalbearbejdning ved valsning og ekstrudering. Her skal vises, hvordan man arbejder med disse.

For et umodificeret Coulomb materiale gælder med betegnelserne fra kapitel 4

$$r = s \sin\varphi + c \cos\varphi \quad (5.1.1)$$

Indføres dette i (4.9), fås sliplinjeligningen

$$ds \pm 2(s \tan\varphi + c)d\theta = \frac{dl}{\cos\varphi} (\gamma_x \cos(\theta \mp (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})) + \gamma_y \sin(\theta \mp (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}))) \quad (5.1.2)$$

hvor øverste fortegn gælder for en a-linje og nederste fortegn for en b-linje.  $dl$  skal regnes med fortegn, som det fremgår af figur 4.3. Spændingerne, som fås ved indsættelse af (5.1.1) i (4.3), bliver

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -s + (s \sin\varphi + c \cos\varphi) \cos 2\theta \\ \sigma_y &= -s - (s \sin\varphi + c \cos\varphi) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$\tau_{xy} = (s \sin\varphi + c \cos\varphi) \sin 2\theta$$

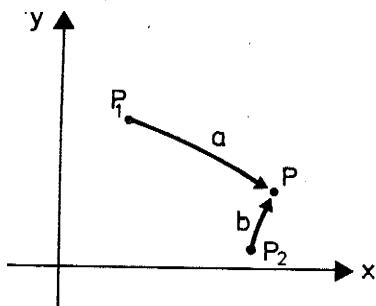
### 5.2 Beregning af sliplinjefelter

Spændingerne i et område beskrives ved et net af sliplinjer, som dækker området. Hvert netpunkt, hvor en a-linje og en b-linje skærer hinanden, karakteriseres ved sin placering  $(x,y)$ , spændingsniveauet  $s$ , og hovedspændingsretningen  $\theta$ , ialt 4 størrelser.

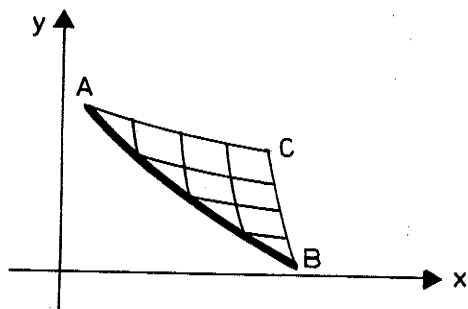
Grundberegningen består i følgende:

I to punkter,  $P_1$  og  $P_2$ , se figur 5.2.1, kendes spændingerne. Der ønskes fundet et punkt  $P$ , så  $P$  og  $P_1$  ligger på samme a-linje, og  $P$  og  $P_2$  ligger på samme b-linje. Til bestemmelse af  $P$  haves fire ligninger, nemlig en a-sliplinjeligning langs  $P_1P$ , en b-sliplinjeligning langs  $P_2P$ , samt de to betingelser, at retningen fra  $P_1$  til  $P$  skal være retningen af en a-linje, og at retningen fra  $P_2$  til  $P$  skal være retningen af en b-linje. Da  $P$  netop beskrives ved fire størrelser, kan ligningerne løses og  $P$  findes.

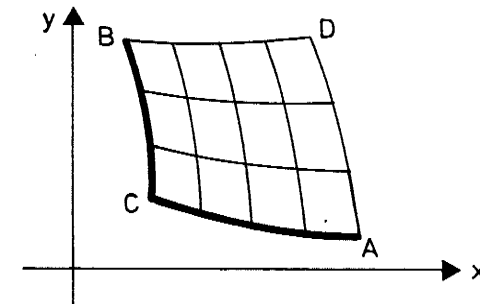
Da (5.1.2) er en differentiallyigning, skal  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P$  naturligvis være infinitesimalt tætliggende, men erstattes differentialerne  $ds$  og  $d\theta$  med differenserne  $\Delta s$  og  $\Delta\theta$ , og  $dl$  med afstanden mellem punkterne, og indsættes i stedet for



Figur 5.2.1 Grundberegningen i et sliplinjefelt.



Figur 5.2.2 Første begyndelsesværdiproblem.



Figur 5.2.3 Andet begyndelsesværdiproblem.

$s$  og  $\theta$  gennemsnittet af værdierne ved endepunkterne, og bruges endelig den geometriske betingelse, at retningen af linjestykkerne  $P_1P$  og  $P_2P$  skal svare til gennemsnits- $\theta$ -værdierne af endepunktsværdierne, fås en numerisk løsningsmetode, som konvergerer mod den korrekte løsning. Metodens numeriske fejl er proportionale med kvadratet på skridtlængden.

Ved at anvende denne metode kan man finde spændingerne i et område ud fra visse betingelser langs områdets rand. Man skelner mellem tre begyndelsesværdiproblemer.

Ved det første begyndelsesværdiproblem kendes alle spændingskomponenter langs en kurve  $AB$  i  $xy$ -planen, se figur 5.2.2. Ved successivt at benytte den omtalte beregningsmetode findes spændingerne i hele det område, der begrænses af  $AB$ , a-linjen fra  $A$ ,  $AC$ , og b-linjen fra  $B$ ,  $BC$ .

I det andet begyndelsesværdiproblem kendes en del af en a-linje,  $CA$ , og en del af en b-linje,  $CB$ , begge udgående fra samme punkt,  $C$ , se figur 5.2.3. Spændingerne kan nu findes i området begrænset af a-linjerne  $CA$  og  $BD$  og b-linjerne  $CB$  og  $AD$ .

Ved det tredje begyndelsesværdiproblem kendes en sliplinje,  $AB$  på figur 5.2.4, og to betingelser, som skal gælde langs  $AC$ . Hermed kan området begrænset af  $AC$  og sliplinjerne  $AB$  og  $BC$  udfyldes. Til bestemmelsen af et indre punkt i trekantområdet haves som før to ligninger fra a-linjen og to ligninger fra b-linjen. For punkter på  $AC$  haves to ligninger fra den sliplinje, som skærer  $AB$  og  $AC$ ,

på figur 5.24 en a-linje, og de to ligninger, som skal gælde langs AC. Som eksempler på sådanne ligninger kan nævnes følgende: AC er en bestemt kurve i xy-planen, og hovedspændingsretningen langs AC skal være noget bestemt, eller normal- og forskydningsspændingen langs AC skal begge være nul.

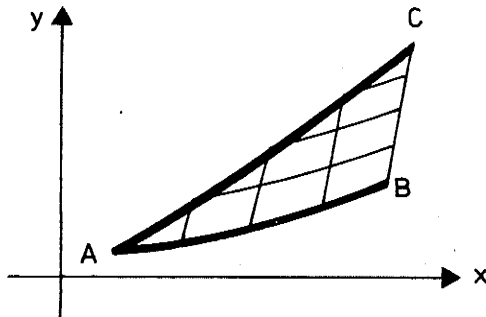
For et vægtløst materiale, dvs. hvor højresiden i (5.1.2) er lig med nul, beskrives sliplinjenettets geometri af Hencky's sætninger. Sætningerne, af hvilke den anden kan udledes af den første, er angivet af Hencky i [23.2] for  $\varphi = 0$ . De lyder således:

To punkter bevæges på hver sin a-sliplinje, så de hele tiden ligger på den samme b-sliplinje. Vinklen mellem tangenterne til b-sliplinjen i de to punkter er da konstant under denne bevægelse.

Når et punkt bevæges langs en a-linje, vil krumningsradius af de b-linjer, punktet passerer, ændres med den på a-linjen tilbagelagte buelængde.

Sætningerne gælder også, når man udskifter a-linjer med b-linjer og omvendt. Mens Hencky's første sætning gælder uafhængigt af  $\varphi$ , skal den anden sætning omformes for også at gælde for friktionsvinkler forskellige fra nul. Den kan f.eks. lyde sådan:

Et punkt P bevæges langs en a-linje. Krumningscentret K for b-linjen i P vil naturligvis ligge på en normal til b-linjen, dvs. en linje, der danner vinklen  $\varphi$  med a-linjen. Når P bevæges et (infinitesimalt) stykke, vil K bevæge sig langs den linje gennem K, der står vinkelret på a-linjens tangent i P.



Figur 5.2.4 Tredje begyndelsesværdiproblem.

### 5.3 Rankine-felt

Der kendes nogle analytiske løsninger til sliplinjeligningerne.

Hvis hovedspændingsretningerne antages konstante overalt, og rumvægten er konstant, fås retlinede sliplinjer, se figur 5.3.1.

Feltet kaldes et Rankinefelt. Idet  $(\gamma_x, \gamma_y) = (0, -\gamma)$ , fås af (5.1.2),

$$ds = -\frac{\gamma}{\cos\varphi} (dl_1 \sin(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + dl_2 \sin(\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}))$$

En isobar bestemmes af

$$ds = 0 = dl_1 \sin(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + dl_2 \sin(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) = 0$$

$$\frac{dl_1}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})} = -\frac{dl_2}{\sin(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}$$

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|},$$

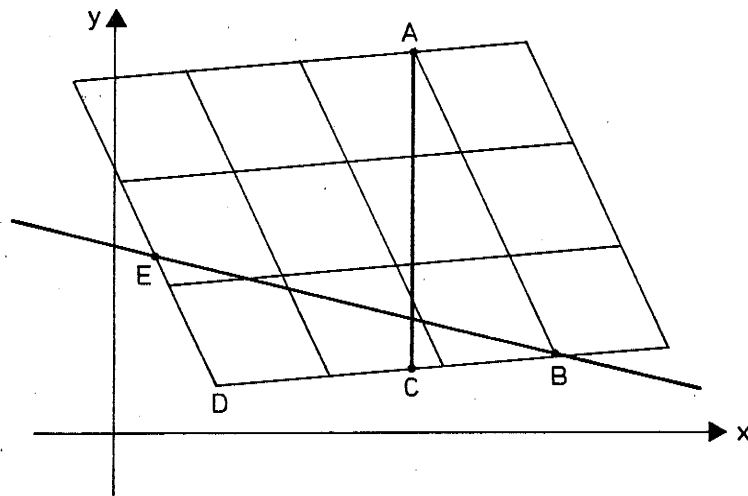
hvor linjen gennem E og B er en isobar, og AC er en lodret linje. Det fremgår heraf, at isobaren er en "skævvinklet tværvektor" af lodlinjen, hvor koordinaterne måles langs sliplinjerne. Isobarens hældningsvinkel  $v_i$  kan findes heraf:

$$v_i = \arctan\left(\frac{-\sin 2\theta \sin \varphi}{1 - \cos 2\theta \sin \varphi}\right)$$

Isobarernes største hældning fås, når det ene sæt sliplinjer er lodrette; de bliver da parallelle med det andet sæt sliplinjer, dvs. de får hældningsvinklen  $\varphi$ .

For et rent friktionsmateriale, dvs. med  $c = 0$  og  $\varphi > 0$ , skal en ubelastet overflade være en isobar. Overfladens maksimale hældning kaldes skræntvinklen. Den er ifølge det foregående lig med friktionsvinklen.





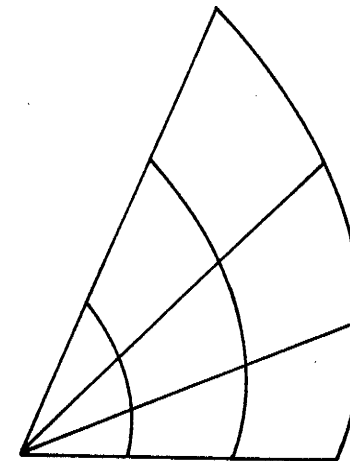
Figur 5.3.1 Rankinefelt med lodlinje (AC) og isobar (EB).

#### 5.4 Prandtl-felt

En zone i et vægtløst materiale, hvori det ene sæt af sliplinjer er rette og går igennem samme punkt, kaldes en Prandtl-zone. Da sliplinjerne skal skære hinanden under vinklerne  $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ , bliver det andet sæt af sliplinjer logaritmiske spiraler med stigningsvinkel  $\varphi$ , se figur 5.4.1. Langs de retlinede sliplinjer er spændingerne konstante. På figur 5.4.1 er det a-linjerne, der er spiraler. Her fås af (5.12)

$$ds + 2(s \tan \varphi + c) d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$s = (s_0 + c \cot \varphi) e^{-2(\theta - \theta_0) \tan \varphi} - c \cot \varphi$$



Figur 5.4.1 Prandtl-felt.

### 5.5 Cykloide-felt

Et interessant sliplinjefelt blev angivet af Prandtl for  $\varphi = 0$  i [23.1], og af W. Hartmann for  $\varphi > 0$ .

I et vægtløst materiale forlanges det, at hovedspændingsretningen kun må afhænge af koordinaten  $y$  i et  $xy$ -koordinatsystem, dvs.  $\theta = \theta(y)$ . Regningerne skal ikke gennemgås her, de er refereret med andre betegnelser af Nadai i [63.1] pp. 471 - 473. I løsningen er sliplinjernerne cykloider med parameterfremstillingen

$$x = c_0(\mp 2\theta \cos\varphi + \cos 2\theta) + c_1 \quad (5.5.1)$$

$$y = c_0(2\theta \sin\varphi + \sin 2\theta) \quad (5.5.2)$$

hvor øverste fortegn gælder for a-linjerner og nederste for b-linjerner.  $c_0$  og  $c_1$  er arbitrære konstanter.  $c_1$  udtrykker netop, at feltets geometri er uafhængig af  $x$ . Spændingerne varierer således:

$$s = c_2 e^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \left(\frac{x}{c_0} - \cos 2\theta\right)} - c \cot\varphi \quad (5.5.3)$$

Den arbitrære konstant  $c_2$  bestemmes af spændingsniveauet ét sted i feltet.

Af (5.5.2) ses, at  $\frac{dy}{d\theta} = 0$  for  $\theta = \pi \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ . Disse værdier begrænser da løsningen, og der fås et såkaldt passivt og et aktivt felt for henholdsvis

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (5.5.4)$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (5.5.5)$$

Sliplinjefelterne i de to tilfælde er vist på figur 5.5.1 og figur 5.5.2. På figur 5.5.1 er en fysisk fortolkning den, at en masse, som befinder sig mellem to stive og ru plader, presses ud (til venstre på figuren), mens pladerne nærmer sig hinanden. Situationen kaldes passiv, da den drivende kraft overføres fra pladerne til

mediet, som således er passivt (modtager påvirkningen).

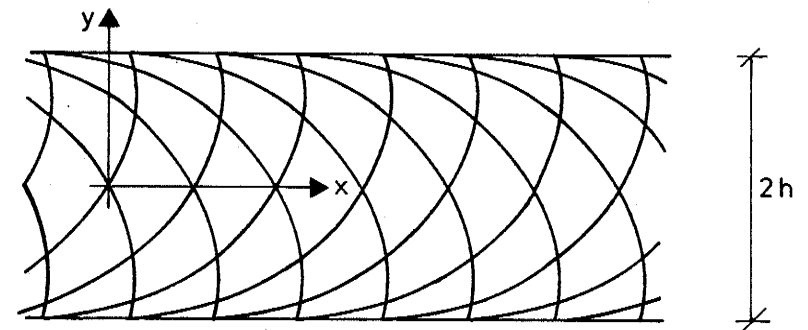
På figur 5.5.2, som er den aktive situation, er det mediet, som under bevægelse mod venstre presser pladerne fra hinanden.

Betegnelserne passiv og aktiv er her anvendt analogt til deres anvendelse for brud bag støttemure og under fundamenter. Ordet beskriver mediets (jordmassens) rolle ved bruddet; ved aktivt brud presses væggen af mediet væk fra dette, ved passivt brud bevæges væggen ind i mediet, som (passivt) giver efter for denne bevægelse.

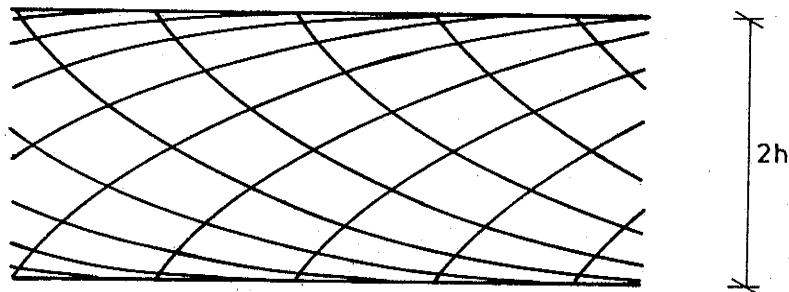
Kaldes den halve højde af mediet på figur 5.5.1 og 5.5.2  $h$ , er konstanten  $c_0$  i (5.5.1), (5.5.2) og (5.5.3) givet ved henholdsvis (5.5.6) og (5.5.7) i det passive og det aktive tilfælde.

$$c_0 = \frac{h}{\cos\varphi + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi} \quad (5.5.6)$$

$$c_0 = \frac{h}{\cos\varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi} \quad (5.5.7)$$



Figur 5.5.1 Passivt cykloidefelt.



Figur 5.5.2 Aktivt cykloidefelt.

### 5.6 Indhyllingskurve i sliplinjefelt

Det bemærkes, at cykloidefeltets begrænsningslinjer er indhyllingskurver for sliplinjer. Coulombs flydebetingelse er derfor opfyldt langs linjerne. De kan også være flytningsdiskontinuitetslinjer. De er imidlertid ikke selv sliplinjer. Hvis de var det, skulle spændingerne langs dem ifølge sliplinjeligningerne f.eks. (5.1.2) være konstante, hvilket ifølge (5.5.3) ikke er tilfældet. Ved en deformation vil de relative flytninger heller ikke være konstante, hvad de skulle være langs en ret sliplinje.

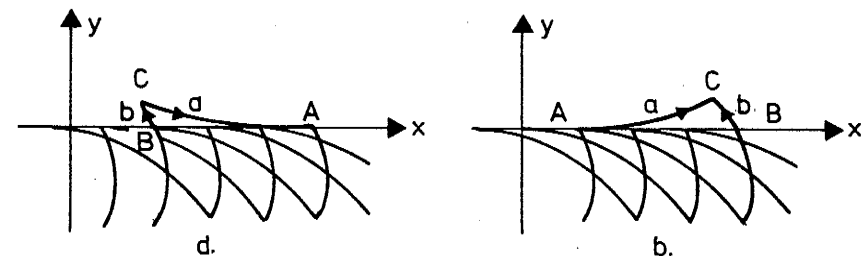
En indhyllingskurve i et sliplinjefelt er en interessant kurve. En sådan kurve er nemlig, som det vil blive vist, en grænsekurve for det aktuelle materiale. Hvis der nemlig skal findes spændinger i ligevægt udenfor indhyllingskurven, skal materialet her have en stærkere flydebetingelse. Dette vil blive vist ved at vise, at den i kapitel 4 indførte størrelse  $\beta$  skal være større end 1 uden for indhyllingskurven.

Først indses det, at sliplinjefeltet ikke kan udvides med et sliplinjefelt ned de samme styrkeparametre. Dette skulle findes ved det første begyndelsesværdiproblem, se kapitel 5.2, og det viser sig, at den zone, man finder, ligger inden for indhyllingskurven, dvs. på samme side som det felt, man startede med. Eksempelvis vil man af det passive felt på figur 5.5.1 få et aktivt felt som det på figur 5.5.2, dog med en anden bredde, og omvendt.

(Dette var også forventeligt, da en indhyllingskurve for en kurveskare almindeligvis er en kurve, som tangeres, men ikke skæres af skarens kurver. Kurveskaren ligger således på den ene side af indhyllingskurven.)

I det følgende behandles en retlinet indhyllingskurve, materialerne antages vægtløse, og friktionsvinklen  $\varphi$  antages konstant. Dette er uden betydning for det kvalitative resultat, men simplificerer formlerne.

På figur 5.6.1 er vist de to mulige måder, hvorpå karakteristikkurverne kan forløbe umiddelbart uden for en indhyllingskurve. Inden for indhyllingskurven er tegnet et passivt sliplinjefelt, men resultaterne gælder lige så vel for det aktive, da vi i begge tilfælde har  $\tau_{xy} > 0$ , og  $\tau_{xy}$  er en voksende funktion af  $x$ .  $x$ -aksen er indlagt i indhyllingslinjen, og  $y$ -aksen peger uden for denne, dvs. ud af det område, hvori sliplinjefeltet er kendt.



Figur 5.6.1 Mulige karakteristikker uden for indhyllingskurve i sliplinjefelt.

På figur 5.6.1 a er vist to infinitesimale karakteristikkedele, BC og AC, som er henholdsvis  $b$ - og  $a$ -linjer. For disse linjer gælder formel (4.8). Linjerne orienteres BC mod C og AC mod A i overensstemmelse med figur 4.3. Af denne figur ses også, at  $\beta_{n1} = \frac{\partial \beta}{\partial y} = \beta_y$ .

da retningen  $n_1$  er sammenfaldende med y-aksen. Langs indhyllingskurven er  $\beta = 1$ .

Af formel (4.8) fås nu

$$\cos\varphi (s_A - s_C) + 2r (\theta_A - \theta_C) = r\beta_Y l_{CA}$$

$$\cos\varphi (s_C - s_B) - 2r (\theta_C - \theta_B) = r\beta_{n2} l_{BC}$$

Da kurven CA tangerer x-aksen i A, er  $l_{BC}$  infinitesimal i forhold til  $l_{CA}$ , som er proportional med  $\theta_A - \theta_C$ ,  $\theta_C - \theta_B$ ,  $s_A - s_C$  og  $s_C - s_B$ . Ledet med  $l_{BC}$  kan derfor negligeres.

Efter elimination af  $s_C$  fås

$$\beta_Y = \frac{\cos\varphi}{r} \frac{s_A - s_B}{l_{CA}} + \frac{2}{l_{CA}} (\theta_A + \theta_B - 2\theta_C)$$

Eller med andre betegnelser, da  $\theta_A = \theta_B$ :

$$\beta_Y = \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial s}{\partial x} + 4 \kappa_a \quad (5.6.1)$$

hvor  $\kappa_a$  er krumningen af a-karakteristikken. Begge led på højre side af (5.6.1) er positive.

I det på figur 5.6.1b viste tilfælde fås, idet AC og BC begge orienteres mod C:

$$\cos\varphi (s_C - s_A) + 2r (\theta_C - \theta_A) = r\beta_Y l_{AC}$$

$$\cos\varphi (s_B - s_C) - 2r (\theta_B - \theta_C) = -r\beta_{n1} l_{CB}$$

Som før udgår længden  $l_{CB}$ , og efter elimination af  $s_C$  fås

$$\beta_Y = \frac{\cos\varphi}{r} \frac{s_B - s_A}{l_{AC}} + \frac{2}{l_{AC}} (2\theta_C - \theta_A - \theta_B)$$

Eller med andre betegnelser:

$$\beta_Y = \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial s}{\partial x} + 4 \kappa_a$$

Altså den samme betingelse som før. Også her er begge led positive.

En nødvendig betingelse for, at karakteristikfeltet kan fortsættes ud over en indhyllingskurve, er altså, at der her kan regnes med  $\beta$ -værdier større end 1, dvs. at flydebetingelsen her overskrides. Dette er kun muligt, hvis materialet her er stærkere end inden for indhyllingskurven.

I et homogent materiale kan en indhyllingskurve for et sliplinje-felt altså kun eksistere ved materialets begrænsningslinjer.

### 5.7 Flytninger i sliplinjefelt

Som nævnt i kapitel 3 vil længdetøjningen ved en plastisk, plan deformation af et umodificeret Coulombmateriale være nul i de retninger, som danner vinklerne  $\pm (\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$  med første hovedretning. Disse retninger er netop sliplinjernes retninger, så heraf kan det altså konkluderes, at sliplinjerne ved en plastisk deformation intet sted ændrer længde. Deformationsmulighederne i et sliplinjefelt kan altså anskueliggøres ved, at man tænker sig sliplinjerne erstattet af stænger med charnierer, hvor a- og b-linjerne skærer hinanden.

I et givet sliplinjefelt kan flytningerne beregnes i samme rækkefølge, som spændingerne blev det, dvs. ligesom i afsnit 5.2 haves første, andet og tredje begyndelsesværdiproblem. Hvor der ved spændingsberegningen gjaldt to ligninger langs hver sliplinje, er der her ved flytningsberegningen kun en, nemlig den, at længdetøjningen langs sliplinjen er nul. Tilsvarende bestemmes nu også kun to størrelser, nemlig flytningen i x- og y-retningen, mod før fire størrelser i hvert sliplinjenetpunkt.

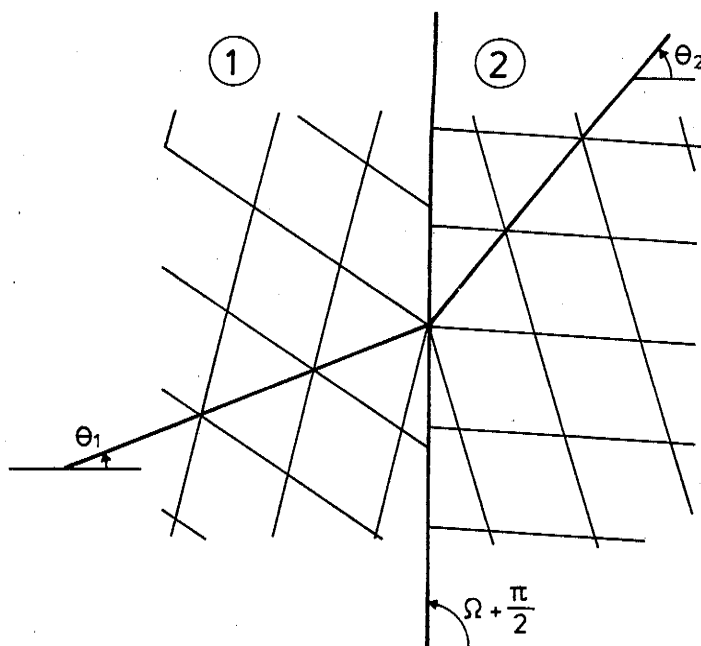
Da dissipationen altid skal være positiv eller nul, er kun de deformationer af sliplinjenettet mulige, hvor alle de stumpe vinkler mellem sliplinjerne formindskes eller forbliver uændrede. I stang-analogien betyder dette, at der ved hvert netpunkt skal anbringes klodser i de spidse vinkler, som netop udfylder disse og forhindrer en formindskelse.

### 5.8 Spændingsdiskontinuitetslinje

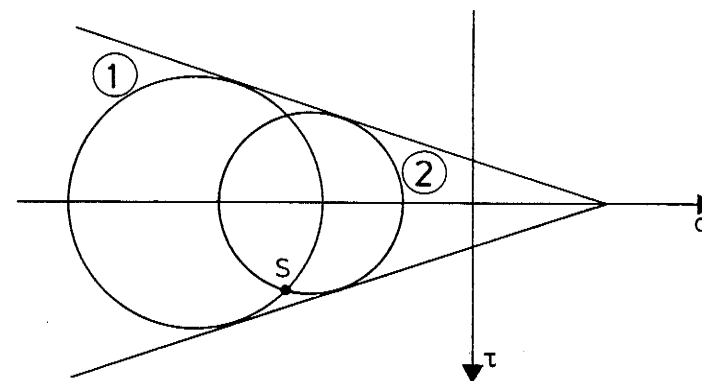
Det kan være praktisk at arbejde med flydezoner, hvor spændingerne er diskontinuerte over en kurve, en såkaldt spændingsdiskontinuitetslinje. På figur 5.8.1 er vist en sådan linje, hvis normal har retningsvinklen  $\Omega$ , og forskellige spændingstilstande på de to sider heraf. Ifølge loven om aktion og reaktion skal spændingerne på diskontinuitetslinjen  $\sigma_s$ ,  $\tau_s$ , repræsenteret af punktet S på figur 5.8.2, være kontinuerte. Dette giver ved hjælp af (5.1.3)

$$\begin{aligned}\sigma_s &= -s_1 + (s_1 \sin\varphi + c \cos\varphi) \cos(2(\theta_1 - \Omega)) \\ &= -s_2 + (s_2 \sin\varphi + c \cos\varphi) \cos(2(\theta_2 - \Omega))\end{aligned}\quad (5.8.1)$$

$$\begin{aligned}\tau_s &= (s_1 \sin\varphi + c \cos\varphi) \sin(2(\theta_1 - \Omega)) \\ &= (s_2 \sin\varphi + c \cos\varphi) \sin(2(\theta_2 - \Omega))\end{aligned}\quad (5.8.2)$$



Figur 5.8.1 Sliplinjefelter omkring spændingsdiskontinuitetslinje.



Figur 5.8.2 Spændinger på hver side af spændingsdiskontinuitetslinje.

Heraf kan spændingsniveauet elimineres, hvorved vi for en egentlig spændingsdiskontinuitetslinje, dvs. for  $\theta_1 + \theta_2$ , får de to ligninger

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 - 2\Omega) = \sin\varphi \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.8.3)$$

$$(s_1 \tan\varphi + c) \sin(2\theta_1 - 2\Omega) = (s_2 \tan\varphi + c) \sin(2\theta_2 - 2\Omega) \quad (5.8.4)$$

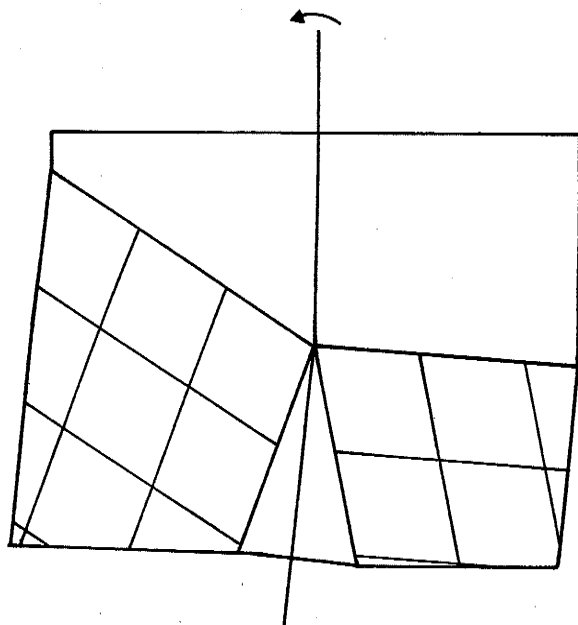
Da S på figur 5.8.2 er skæringspunktet mellem to forskellige Mohr'ske cirkler, som tangerer flydekurven, kan S ikke selv ligge på denne, dvs. at en spændingsdiskontinuitetslinje ikke kan være en sliplinje.

En spændingsdiskontinuitetslinje stiller visse krav til flytnings-tilstanden. Af figur 5.8.2 ses, at S i område 1 ligger i den spidse vinkel mellem sliplinjerne, mens det i område 2 ligger i den stumpe vinkel mellem dem. Det betyder, at længdetøjningen af diskontinuitetslinjen ifølge område 1 skal være negativ eller nul, mens den ifølge område 2 skal være positiv eller nul. Den må da nødvendigvis være nul, dvs. at en spændingsdiskontinuitetslinje intet sted kan ændre længde ved en plastisk deformation.

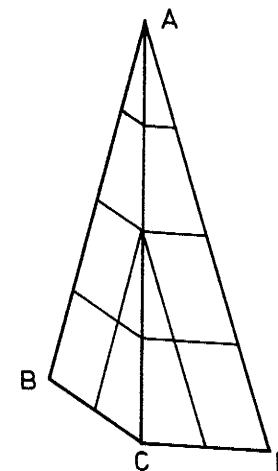
Der er dog stadig mulighed for en deformation. På figur 5.8.3 er vist en sådan, hvor spændingsdiskontinuitetslinjen får et knæk til den side, hvor den ligger i den spidse vinkel mellem sliplinjerne. Da denne deformation er mulig ud fra ethvert punkt på linjen, gælder følgende:

Ved en plastisk deformation optræder en spændingsdiskontinuitetslinje som en ustrækkelig fiber, der dog kan bøjes vilkårligt ind mod den side, hvori linjen ligger i det spidse vinkelrum mellem sliplinjerne.

Ved beregning af flytningerne i et sliplinjefelt med en spændingsdiskontinuitetslinje, AC på figur 5.8.4, skal der tages specielt hensyn til denne. Kendes flytningerne langs en af ABCD's sider, f.eks. AB, kan de findes i hele ABC, idet dette er det tredje begyndelsesværdiproblem jvf. afsnit 5.2. Herefter kan flytningerne i ACD findes ved hjælp af proceduren for første begyndelsesværdiproblem. Flytningerne i hele ABCD kan således bestemmes ud fra flytningerne langs en af siderne.



Figur 5.8.3 Mulig deformation af spændingsdiskontinuitetslinje.



Figur 5.8.4 Flytningerne i hele området ABCD omkring en spændingsdiskontinuitetslinje er bestemt af flytningerne langs f.eks. AB.

### 5.9 Rotationssymmetriske felter

Ved en rotationssymmetrisk konstruktion forstås en konstruktion, som føres over i sig selv ved en drejning af vilkårlig størrelse om en fast linje, rotationsaksen. I et røz-cylinderkoordinat-system vil alt være uafhængigt af  $\theta$ , og det kan således beskrives fuldstændigt i en rz-plan, dvs. en plan, som indeholder rotationsaksen. Da der således kun er to geometriske frihedsgrader, kan mange begreber fra den plane beskrivelse overføres hertil.

Ligevægtsligningerne for et vægtløst materiale er

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

(5.9.1)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

Hvis vi formelt indfører en ekstra volumenkraft på

$$(\gamma_x, \gamma_y) = \left( \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \frac{\tau_{rz}}{r} \right) \quad (5.9.2)$$

i de plane ligevægtsligninger, ses de at blive til (5.9.1).

I et sliplinjefelt skal spændingerne være i flydning, og da ring-spændingen  $\sigma_\theta$  nu indgår i ligevægtsligningerne, skal den kendes. Kaldes hovedspændingerne i rz-planen  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2$ , haves følgende muligheder:

$$1: \sigma_\theta > \sigma_1 > \sigma_2$$

$$2: \sigma_1 = \sigma_\theta > \sigma_2$$

$$3: \sigma_1 > \sigma_\theta > \sigma_2$$

$$4: \sigma_1 > \sigma_\theta = \sigma_2$$

$$5: \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_\theta$$

Hvis den midterste hovedspænding ikke er lig med en af de andre hovedspændinger, skal den tilsvarende hovedtøjning være nul. Dette betyder, at i tilfælde 1 og 5 skal en af hovedtøjningerne i rz-planen være nul. Et eksempel herpå er et rør med indvendigt overtryk og ubelastede endeflader. Her fås  $\sigma_\theta > \sigma_z = 0 > \sigma_r$ .

I tilfælde 3 skal ringtøjningen  $\epsilon_\theta$  være nul. Da  $\epsilon_\theta$  fås af den radiære flytning  $u_r$  ifølge

$$\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad (5.9.3)$$

kræver dette altså, at flytningen kun foregår langs rotationsaksen.

Den største interesse knytter sig altså her til tilfælde 2 og 4, da de giver de frieste deformationsmuligheder. På grund af fortegnet for  $\epsilon_\theta$  skal tilfælde 2 anvendes, når den radiære flytning er positiv,  $u_r > 0$ , og tilfælde 4 når  $u_r < 0$ . Når fortegnet for  $u_r$  er kendt (eller skønnet), kan beregningerne af spændingerne foregå som i det plane tilfælde, blot med brug af (5.9.2).

Ved beregning af flytningerne kommer dog yderligere en modifikation. I det plane tilfælde var længdetøjningen af sliplinjerne nul. Det gælder ikke her. I tilfælde 2 gælder

$$k\sigma_1 - \sigma_2 - f_c = 0$$

$$k\sigma_\theta - \sigma_2 - f_c = 0$$

Dette muliggør tøjningerne

$$\epsilon_1 = k\lambda_1, \epsilon_\theta = k\lambda_2, \epsilon_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

om hvilke det gælder

$$\epsilon_1 + \epsilon_\theta + k\epsilon_2 = 0 \quad (5.9.4)$$

Sliplinjerne danner stadig vinklen  $\pm(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$  med første hovedretning. Længdetøjningen af en sliplinje  $\epsilon_s$  kan udtrykkes ved  $\epsilon_1$  og  $\epsilon_2$ , se figur 5.9.1:

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos(2(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})) \\ &= \epsilon_1 \frac{1 - \sin\varphi}{2} + \epsilon_2 \frac{1 + \sin\varphi}{2} \\ &= \frac{1}{k+1}(\epsilon_1 + k\epsilon_2) \end{aligned} \quad (5.9.5)$$

Her er sammenhængen mellem  $\varphi$  og  $k$  ifølge (3.3) udnyttet. Af (5.9.4) og (5.9.5) ses, at for  $u_r > 0$  skal gælde

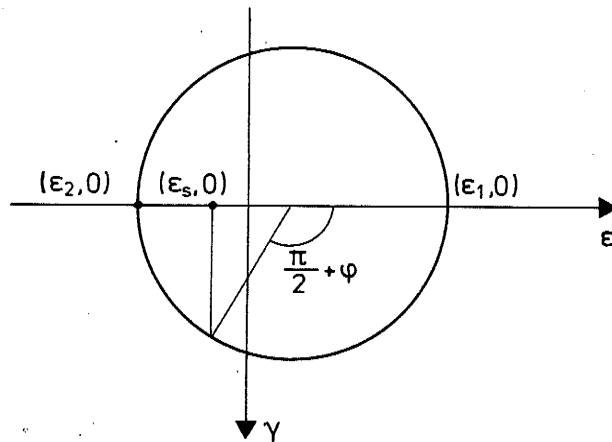
$$\epsilon_s = -\frac{1}{k+1} \epsilon_\theta \quad (5.9.6)$$

I tilfælde 4 fås analogt i stedet for (5.9.4)

$$\epsilon_1 + k(\epsilon_\theta + \epsilon_2) = 0 \quad (5.9.7)$$

og i stedet for (5.9.6) gælder for  $u_r < 0$

$$\epsilon_s = -\frac{k}{k+1} \epsilon_\theta \quad (5.9.8)$$



Figur 5.9.1 Tøjninger i rotationssymmetrisk sliplinjefelt.

I stedet for betingelsen  $\epsilon_s = 0$  skal der altså ved beregning af flytningerne benyttes (5.9.6) henholdsvis (5.9.8) i tilfælde 2 og 4.  $\epsilon_\theta$  er direkte givet ved (5.9.3).

Hvilke deformationer kan et område med en spændingsdiskontinuitet klare? Siderne af spændingsdiskontinuitetslinjen kaldes 1 og 2, således at  $s_1 > s_2$  i overensstemmelse med figur 5.8.2. Vi betragter tilfældet med  $u_r > 0$ . Af (5.9.6) ses, at  $\epsilon_s < 0$ . Nu skal det jo gælde, at  $\epsilon_1 \geq 0$ , så vi søger først den deformation, for hvilken  $\epsilon_1 = 0$ , se figur 5.9.2. Længdetøjningen af diskontinuitetslinjen bliver

$$\epsilon_d = \frac{1}{2} \epsilon_2 (1 + \cos(2\theta - 2\alpha)) \quad (5.9.9)$$

Ved hjælp af (5.8.1) vurderes dette:

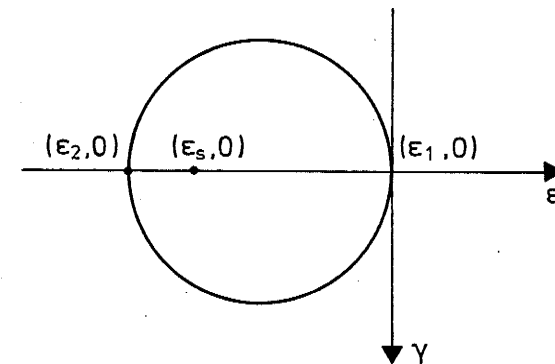
$$\begin{aligned} & s_1(-1 + \sin\varphi \cos(2\theta_1 - 2\alpha)) + c \cos\varphi \cos(2\theta_1 - 2\alpha) \\ &= s_2(-1 + \sin\varphi \cos(2\theta_2 - 2\alpha)) + c \cos\varphi \cos(2\theta_2 - 2\alpha) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & s_2(-1 + \sin\varphi \cos(2\theta_1 - 2\alpha)) + c \cos\varphi \cos(2\theta_1 - 2\alpha) \\ & > s_2(-1 + \sin\varphi \cos(2\theta_2 - 2\alpha)) + c \cos\varphi \cos(2\theta_2 - 2\alpha) = \\ & \cos(2\theta_1 - 2\alpha) > \cos(2\theta_2 - 2\alpha) \end{aligned}$$

Ved hjælp af (5.9.5) og (5.9.6) ses, da  $\epsilon_1 = 0$ , at  $k\epsilon_2 = -\epsilon_\theta$ .  $\epsilon_2$  har altså den samme negative værdi på begge sider af diskontinuitetslinjen. Hermed fås af (5.9.9)

$$\epsilon_{d1} < \epsilon_{d2} < 0 \quad (5.9.10)$$

Hertil kan adderes bidrag,  $\Delta\epsilon_{d1}$  og  $\Delta\epsilon_{d2}$ , fra yderligere tøjninger i områderne ved siden af linjen. Om disse er det tidligere fundet, at



Figur 5.9.2 Tøjninger ved en spændingsdiskontinuitetslinje i et rotationssymmetrisk sliplinjefelt.

$$\Delta\epsilon_{d1} < 0, \Delta\epsilon_{d2} > 0 \quad (5.9.11)$$

Af (5.9.10) og (5.9.11) fås for alle værdier, der er kinematisk mulige i de enkelte zoner

$$\epsilon_{d1} + \Delta\epsilon_{d2} < \epsilon_{d2} + \Delta\epsilon_{d2}$$



En betingelse for, at zonen er kinematisk mulig, er, at de to sider af linjen kan "enes" om en længdetøjning af diskontinuitetslinjen, og dette er åbenbart ikke muligt, hvis der er positive radiære flytninger langs denne.

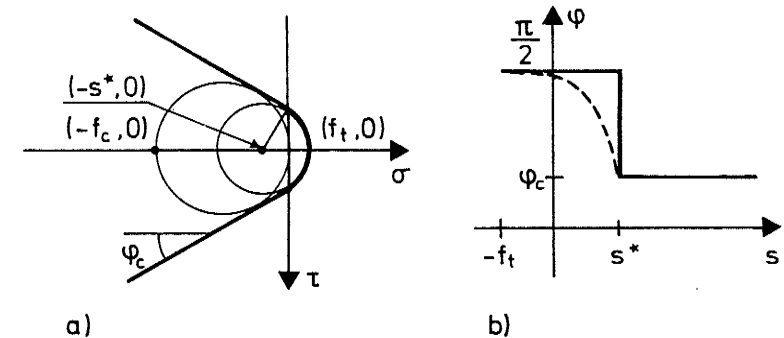
På ganske analog måde kan det vises, at der ikke kan findes en længdetøjning i en spændingsdiskontinuitetslinje, som tilfredsstiller de betingelser, hvert område stiller for sig, når den radiære flytning er negativ.

Den radiære flytning skal altså være nul, for at en spændingsdiskontinuitetslinje kan være kinematisk mulig. I et sådant tilfælde vil også længdetøjningen af sliplinjerne omkring diskontinuitetslinjen være nul. Diskontinuitetslinjen kan ikke ved deformationen ændre krumning, da den så ville få radiære flytninger. Heraf følger, at den eneste mulighed er, at linjen får en konstant flytning langs rotationsaksen. Det område, som afgrænses af sliplinjerne udgående fra diskontinuitetslinjens endepunkter, jvf. det første begyndelsesværdiproblem figur 5.2.2, vil da få samme konstante flytning langs rotationsaksen. Det vil dermed ikke få tøjninger, men være et stift legeme ved deformationen.

Et sliplinjefelt, som ikke kan deformeres, har kun nedreværdimæssig betydning. Den bæreevne, der bestemmes heraf, er ikke (bevist at være) den rigtige bæreevne. Feltet har derfor ingen fysisk betydning, og det kan ikke findes i noget virkeligt materiale.

Den betragtede type af spændingsdiskontinuitetslinjer er altså ikke kinematisk mulig i rotationssymmetriske sliplinjefelter. Der findes dog en anden simplere type af spændingsdiskontinuitet, som er mulig. Hvis der nemlig findes en linje, over hvilken den radiære flytning skifter fortegn, vil denne være en diskontinuitetslinje for ringspændingen  $\sigma_\theta$ . Dette giver dog hverken anledning til diskontinuitet i de øvrige spændinger, hovedspændingsretninger eller flytninger.

## 5.10 Sliplinjefelter for modificeret Coulomb-materiale



Figur 5.10.1 Flydebetingelse og friktionsvinkel for modificeret Coulomb-materiale.

For det modificerede Coulomb-materiale består flydebetingelsen i Mohr's plan af de på figur 5.10.1a viste to halvlinjer, forbundet glat med en cirkelbue.

Af (4.1) og (4.10) fås  $\varphi$  som funktion af trykniveauet  $s$  som vist på figur 5.10.1b. Funktionen er stykkevis konstant og diskontinuert der, hvor Mohr's cirkel indeholder den i flydefladen indgående cirkel.

I et sliplinjefelt med friktionsvinklen  $\pi/2$  er de to sæt af sliplinjer parallelle, så et sådant kan vanskeligt optegnes. Derfor indføres den punkterede kurve på figur 5.10.1b som en tilnærmelse til den virkelige. Kurven kan repræsenteres i intervallet

$$-f_c < s < s^* = \frac{1}{2}(f_c - (k+1)f_t) \text{ af ligningen} \\ \sin \varphi = 1 - (1 - \sin \varphi_c) \left( \frac{s + f_c}{f_c + s^*} \right)^n \quad (5.10.1)$$

hvor  $n$  er et stort tal. Dette giver iflg. (4.10)

$$r = s - (1 - \sin \varphi_c) \frac{f_c + s^*}{n+1} \left( \frac{s + f_c}{f_c + s^*} \right)^{n+1} \quad (5.10.2)$$

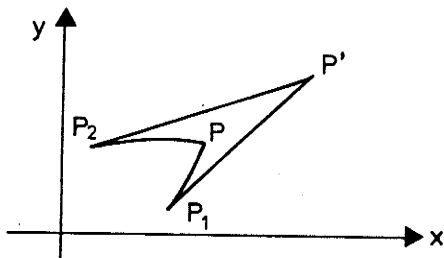
Heraf kan flydebetingelsen i Mohr's plan findes med  $s$  som parameter ved hjælp af

$$\sigma = -s + r \sin \varphi ; \tau = r \cos \varphi$$

og på hovedspændingsform ved hjælp af

$$\sigma_1 = -s + r ; \sigma_3 = -s - r$$

Nu betragtes elementartilfældet på figur 5.10.2. Det antages, at spændingerne udtrykt ved  $s$  ligger tæt ved  $s^*$  ved  $P_1$  og  $P_2$ , og at spændingen ved  $P$  viser sig at blive mindre end  $s^*$ . Dette medfører, at  $\varphi$  vokser kraftigt, og at  $P$  derfor flyttes til et fjernere punkt  $P'$ .



Figur 5.10.2 Sliplinjer påvirket af trækstyrken.

Punkter i feltet, hvor  $s < s^*$  har alle samme værdi af  $\sigma_2$ . Ligevægt i et plant, vægtløst medium med en sådan konstant hovedspænding  $\sigma_2$  er kun mulig, hvis  $\sigma_1$ -trajektorierne er rette linjer. Sliplinjerne  $P_1P'$  og  $P_2P'$  vil derfor være næsten parallelle, og deres retning ved  $P'$  vil være omtrent den samme som anden hovedspændingsretning ved  $P_1$  og  $P_2$ . Sliplinjerne vil derfor, når  $s$  passerer under  $s^*$ , blive retlinede og parallelle.

Ved numeriske sliplinjeberegninger kan man ikke godt anvende disse parallelle sliplinjer, da det er deres skæringspunkter, man er interesseret i. Man har derfor brug for en flydebetingelse, hvor  $\varphi$  aldrig bliver lig med  $\pi/2$ . For at opnå dette skal man erstatte cirkelbuen på figur 5.10.1a med en kurve, hvor det punkt, som tangerer den

Mohr'ske cirkel, først når  $\sigma$ -aksen, når cirkelens radius bliver lig med nul.

Man kan altså enten indføre to meget stejle, men ikke lodrette linjestykker, som tangerer cirklen tæt ved  $(f_t, 0)$ , eller man kan erstatte cirklen med en glat kurve, hvis krumningsradius går mod nul, når punktet nærmer sig kurvens skæringspunkt med  $\sigma$ -aksen. Ved det førstnævnte af disse forslag fås en friktionsvinkel, som i hele intervallet  $-f_t < s < s^*$  er konstant og lidt mindre end  $\pi/2$ . Et eksempel på det andet forslag er (5.10.1). At erstatte cirklen på figur 5.10.1a med en parabel afhjælper altså ikke de numeriske problemer ved sliplinjefeltberegninger, da parablen har en endelig krumningsradius i sit toppunkt.

### 5.11 Hovedretninger ved delvist ru væg

For et friktionsmateriale, der glider (ned) langs en delvis ru væg, kan hovedspændingsretningen beregnes uafhængigt af trykniveauet. Der er to tilfælde, et såkaldt passivt og et aktivt. Disse betegnelser refererer til tryktilstanden i en silo, se kapitel 13. I den passive tilstand er trykket på væggen så stort som muligt i forhold til trykniveauet i friktionsmaterialet, i den aktive tilstand er det så lille som muligt. Idet friktionsvinklen langs væggen kaldes  $\varphi_v$ , og størrelserne i øvrigt fremgår af figur 5.11.1, fås i det passive tilfælde:

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_v}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin \varphi_v}{\sin \varphi} \quad (5.11.1)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin \varphi_v}{\sin \varphi} + \frac{\varphi - \varphi_v}{2} \quad (5.11.2)$$

$$\theta - \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

I det aktive tilfælde fås:

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_v}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin \varphi_v}{\sin \varphi} \quad (5.11.3)$$

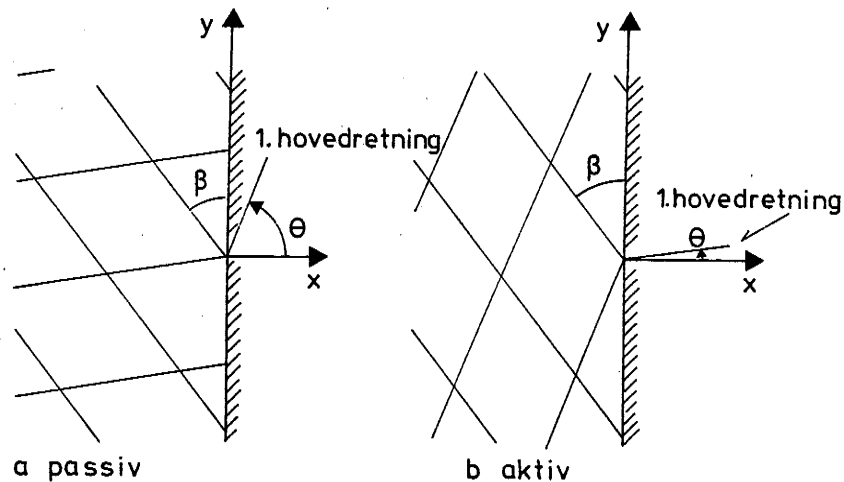
$$\beta = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin \varphi_v}{\sin \varphi} - \frac{\varphi - \varphi_v}{2} \quad (5.11.4)$$

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

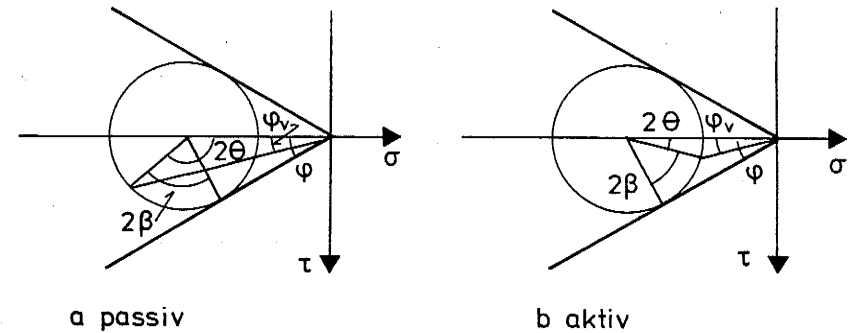
I begge tilfælde gælder

$$\psi_v = \arctan \frac{\sin \varphi \sin 2\theta}{1 - \sin \varphi \cos 2\theta} \quad (5.11.5)$$

Formlerne kan udledes ved betragtning af Mohr's cirkel, se figur 5.10.2. Hvis materialet ikke er et rent friktionsmateriale, men også har en cohæsion  $c$ , gælder formlerne ikke længere. Nu skal trykniveauet også tages med i betragtning. Hvis imidlertid væggen også har en adhæsion  $a$ , og der gælder, at  $c \cot \varphi = a \cot \psi_v$ , gælder formlerne uændret.



Figur 5.11.1 Hovedspændingsretning ved delvis ru væg.



Figur 5.11.2 Mohr's cirkler for figur 5.11.1.

## 6. Enkeltsliplinjer

### 6.1 Indledning

Ved beregning af bæreevnen for idealt plastiske konstruktioner er et særdeles nyttigt værktøj øvreværdisætningen anvendt på flydemekanismer med et endeligt antal stiftlegemebevægelser. Flydemekanismen beskrives her ved flydning i et endeligt antal flydelinjer eller -flader. For mange praktiske opgaver er dette den eneste anvendelige beregningsmåde, der giver beregninger, som kan klares uden stort edb-udstyr. Dette skyldes, at man selv begrænser antallet af ubekendte parametre (flydelinjernes placeringer og legemernes flytningskomposanter), og at enhver belastning og en indviklet geometri kan behandles, uden at ligevægtsligningerne opfyldes i alle detaljer.

Da beregningen er en øvreværdiberegning, kan den give en værdi på den usikre side (for stor bæreevne). Man finder derfor den bedste løsning med en given type brudfigur (mekanisme) ved at minimere bæreevnen med hensyn til de frie parametre, der indgår i denne.

I dette kapitel skal der udledes nogle regler for, hvordan den bedste mekanisme findes for plane konstruktioner.

Ved en elastisk elementmetode-beregning kan udgangspunktet også være nogle skønnede flytninger, men her er man nødt til at skønne betydeligt finere, dvs. have mange flere frie parametre, for at få et rimeligt resultat. Flytningsdiskontinuitetslinjer vil give uendelig tøjningsenergi og kan derfor ikke bruges.

Ved at begrænse sig til brudfigurer med f.eks. to stive legemer har man indført en meget stærk begrænsning af flytningerne og tøjningerne ved brud. Alligevel har det vist sig muligt at nå til den eksakte teoretiske bæreevne af eksempelvis flere typer betonbjælker ved hjælp af øvreværdier med stiftlegemebevægelser.

Et eksempel på en begrænsning, der indføres ved kun at behandle stiftlegemebevægelser, er en skive af von Mises materiale belastet med trykket  $p$  langs hele randen, se afsnit 6.3. Her fås en overvurdering af bæreevnen.

Til at finde den bedste mekanisme kan følgende to principper anvendes:

Optimalt flydelinjeforløb: Lastparameteren søges minimeret (gjort stationær) med hensyn til de parametre, der beskriver flytningerne.

Ligevægt i flydelinjer: Det forlanges, at de til brudfiguren hørende spændinger opfylder ligevægtsligningerne.

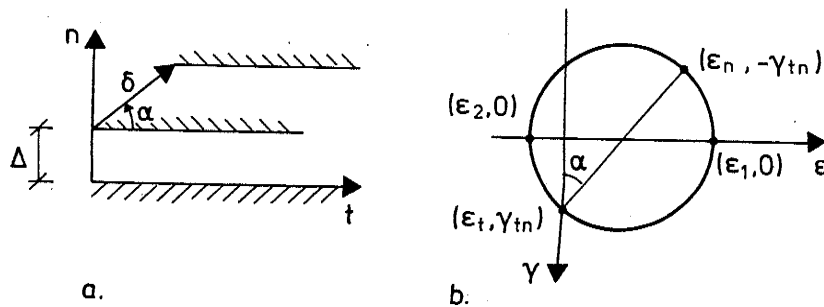
Af alle øvreværdier vil den mindste give den rigtige teoretiske bæreevne. Dette medfører, at det er nødvendigt, at flydelinjeforløbet er optimalt, for at der kan være en mulighed for at tilfredsstille ligevægtsligningerne. At flydelinjeforløbet er optimalt, giver dog ingen garanti for, at det er muligt at tilfredsstille ligevægtsligningerne med spændinger, som ikke overskrider flydebetingelsen, f.eks. umiddelbart ved siden af flydelinjen. Princippet om ligevægt i flydelinjerne kan således være et strengere krav end princippet om optimalt flydelinjeforløb. Det foretrukne princip er altså ligevægtsprincippet; hvor det ikke giver resultat, kan man anvende optimalitetsprincippet.

Et eksempel på anvendelsen af de to principper er den såkaldte ligevægtsmetode for plader, hvor ligevægtsligningerne for de enkelte pladedele vises at være ensbetydende med de ligninger (Eulerligningerne), der gør øvreværdien stationær med hensyn til de geometriske parametre i brudfiguren, se f.eks. [75.1]. Ligevægten opnås dog først efter tilføjelse af nogle passende valgte knudekræfter.

### 6.2 Flytningsdiskontinuitetslinje

En flytningsdiskontinuitetslinje eller flydelinje kan beskrives således, se figur 6.2.1a: Omkring flydelinjen lægges en stribe af bredden  $\Delta$ . Uden for denne stribe er tøjningerne nul, men den ene del translateres i forhold til den anden. Flytningen beskrives ved dens størrelse  $\delta \geq 0$  og dens vinkel med stribens længderetning  $\alpha$ , positiv som en fjernelse af de to dele fra hinanden. Der antages en homogen tøjningstilstand i striben, som i det på figur 6.2.1 viste  $tn$ -koordinatsystem er

$$\epsilon_t = 0; \quad \epsilon_n = \frac{\delta}{\Delta} \sin \alpha; \quad \gamma_{nt} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} \cos \alpha \quad (6.2.1)$$



Figur 6.2.1 Flytninger og tøjninger ved en flytningsdiskontinuitetslinje.

Det ses ved afbildningen i Mohr's plan for tøjninger på figur 6.2.1b, at vinklen fra første hovedtøjningsretning til flydelinjens normal er  $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ . Første hovedtøjningsretning halverer altså vinklen mellem flytningsretningen og den flydelinjenormal, som peger ind i det legeme, hvis relative flytning angives.

Hovedtøjningerne kan fås af Mohr's plan

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} (\sin \alpha + 1); \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} (\sin \alpha - 1) \quad (6.2.2)$$

Det bemærkes, at  $\epsilon_1$  og  $\epsilon_2$  aldrig har samme fortegn, samt at længdetøjningen i de retninger, der danner vinklen  $\pm(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})$  med første hovedretning, er nul.

Dissipationen i flydelinjen fås ved at opsøge det (et) punkt på flydefladen i  $\sigma_1\sigma_2$ -planen, hvor dens udadrettede normal har retningen  $(\sin \alpha + 1, \sin \alpha - 1)$ . Hertil svarer hældningskoefficienten

$$k = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \quad (6.2.3)$$

på kurven  $\sigma_2 = \sigma_2(\sigma_1)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . Da  $k \geq 0$ , kan spændingspunktet kun ligge på den del af flydefladen, hvor  $\sigma_2$  er en voksende eller konstant funktion af  $\sigma_1$ . Den specifikke dissipation bliver

$$\begin{aligned} d &= \epsilon_1 \sigma_1 + \epsilon_2 \sigma_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\Delta} (\sigma_1 (\sin \alpha + 1) + \sigma_2 (\sin \alpha - 1)) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Ved integration over stribens bredde fås dissipationen pr. længdeenhed af striben

$$d_1 = \int_0^{\Delta} d \, dn = \frac{1}{2} \delta (\sigma_1 (\sin \alpha + 1) + \sigma_2 (\sin \alpha - 1)) \quad (6.2.5)$$

Dette bliver også resultatet, når  $\Delta$  går mod nul.

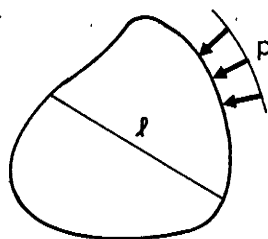
Da stribens bredde kan antages forsvindende i forhold til konstruktionens udbredelse og krumningsradius for flydelinjen, gælder udtrykket for  $d_1$  også for krumme flydelinjer og bevægelser med rotationer, blot vil  $\delta$  og  $\alpha$  i almindelighed variere langs flydelinjen.

### 6.3 Stiftlegememekanisme. Muligheder og begrænsninger

Som et eksempel på, at det er en begrænsning kun at kunne anvende de dele af flydefladen, hvor  $\sigma_2$  er en voksende funktion af  $\sigma_1$ , betragtes en skive af et von Mises-materiale i plan spændingstilstand belastet med et tryk  $p$  langs alle sider, se figur 6.3.1. Bæreevnen er  $p = f_y$ , og de dertil hørende spændinger og tøjninger er

$$\sigma_x = \sigma_y = -f_y; \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\lambda, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \lambda \geq 0$$



Figur 6.3.1 Skive af von Mises-materiale med alsidigt tryk.

I skiven indlægges en ret flydelinje, hvis længde kaldes  $l$ . De to dele translateres i forhold til hinanden stykket  $\delta$  i retningen  $\alpha$  med flydelinjen. De ydre kræfters arbejde bliver

$$A_y = -p\delta l \sin \alpha$$

Dissipationen bliver

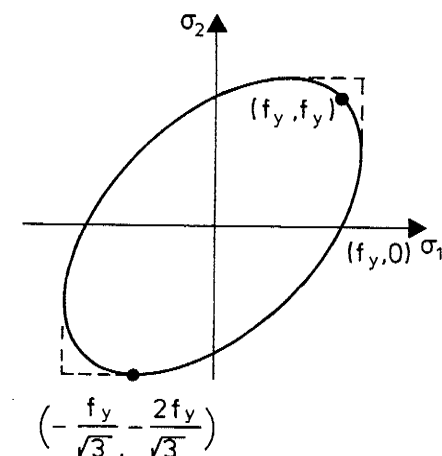
$$D = \frac{2}{\sqrt{3}} f_y \delta l \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha}$$

$$A_y = D \Rightarrow \sin \alpha < 0 \wedge$$

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}} f_y \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cot^2 \alpha}$$

$$p_{\min} = \frac{2}{\sqrt{3}} f_y \approx 1.15 f_y \text{ for } \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

Øvreværdien svarer til punktet  $(\sigma_1, \sigma_2) = (-\frac{1}{\sqrt{3}} f_y, -\frac{2}{\sqrt{3}} f_y)$ , og det ses, at vi med stiftlegemebevægelser ikke kan opnå bedre øvre-værdier end svarende til den flade, der fås ved at udvide von Mises flydeflade med de på figur 6.3.2 viste fire linjestykker.



Figur 6.3.2 von Mises flydebetingelse med udvidelse.

Som det vil fremgå af resultaterne i afsnit 6.4., er den optimale flydelinje ved en translation en ret linje. En ret flydelinje er også optimal ved en gensidig rotation af de to dele om et punkt på denne. Da forskydningsdeformationer på grund af det alsidige tryk ikke kan forøge det ydre arbejde, kan disse udelukkes, og det er således vist, at den fundne øvreværdiløsning virkelig er den mindste, der kan opnås med et endeligt antal stiftlegemebevægelser.

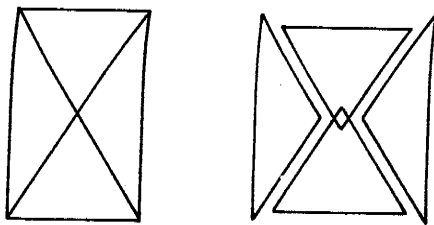
Bortset fra denne begrænsning i flydefladens form kan en vilkårligt god tilnærmelse til en konstruktions flydelast bestemmes ved, at der på passende vis vælges et tilstrækkeligt stort antal stive legemer. Dette indses således:

Den korrekte flydelast er øvreværdien svarende til en mekanisme. For at tilnærme flydelasten vilkårligt godt skal dels de ydre kræfters arbejde, dels den totale dissipation, kunne tilnærmes vilkårligt godt.

For at tilnærme de ydre kræfters arbejde skal blot flytningsfeltet tilnærmes, og dette er naturligvis muligt.

For at vise, at dissipationen kan tilnærmes, er det tilstrækkeligt at vise, at dissipationen i et område med konstant tøjning kan tilnærmes. En homogen tøjningstilstand med hovedtøjningerne  $\epsilon_x = \epsilon_1$  og  $\epsilon_y = \epsilon_2$  modelleres således: Hvis  $\epsilon_x$  og  $\epsilon_y$  har hvert

sit fortegn, inddeles i akseparallelle rektangler med forholdet  $\sqrt{-\epsilon_x/\epsilon_y}$  mellem højde og bredde, se figur 6.3.3. Hvert rektangel deles af sine diagonaler i fire trekanten. Hver trekant translateres vinkelret på den side, der indgår i rektanglet. Forholdet mellem bevægelsen i x-retningen og i y-retningen er  $\sqrt{-\epsilon_x/\epsilon_y}$ .



Figur 6.3.3 Flydelinjer ved hovedtøjninger af modsat fortegn.

Herved bliver de gennemsnitlige tøjninger i rektanglet det ønskede. Tøjningerne i flydelinjerne har de samme hovedretninger og det samme forhold mellem hovedtøjningerne som det ønskede, og dissipationen bliver derfor den samme, som hvis tøjningen var homogen. Hvis  $\epsilon_x$  og  $\epsilon_y$  har samme fortegn, eller den ene er nul, vælges rektangler af vilkårlig størrelse, og de deles nu hver i fire rektangler af to flydelinjer efter de to hovedretninger. Flytningen af de enkelte dele vælges, så de gennemsnitlige tøjninger bliver det ønskede. Dissipationen bliver da det samme, som den ville blive, hvis tøjningen var homogen, når blot  $\sigma_2 = \sigma_2(\sigma_1)$  er en aldrig aftagende funktion.

Denne betingelse er ensbetydende med, at flydefladen kan optegnes som en kurve i en  $\sigma\tau$ -plan, dvs. at materialet er et Mohr-materiale.

Den beregnede bæreevne vil således gå mod den korrekte flydelast, hvis antallet af stive legemer går mod uendelig, og disses form og bevægelse vælges optimalt, og hvis materialet er et Mohr-materiale.

## 6.4 Ligevægtsflydelinjer i vægtløst materiale

### 6.4.1 Generelt

Ligevægtsbetingelserne til en flytningsdiskontinuitetslinje er, at det skal være muligt at angive spændinger dels på flytningsdiskontinuitetslinjen, dels i en omegn omkring denne, som er i ligevægt og ikke overskrider flydebetingelsen, samt at der skal være mulighed for tøjninger svarende til en given relativ bevægelse af de to stive dele, linjen deler legemet i. Spændingerne i en omegn af linjen undersøges i afsnit 6.6. Her betragtes kun spændingerne på linjen.

Det sidste krav medfører, at linjen ved deformationen ikke ændrer længde. Dette betyder, at flydebetingelsen skal være opfyldt langs denne. Ligevægtskravet til denne flydelinje medfører herafter, at linjen skal være en sliplinje, dvs. at den skal opfylde (4.9). Idet omløbsretningen i planen vælges, så forskydnings-spændingen på linjen er negativ, er den en a-linje, og sliplinjeligningen lyder

$$\cos\varphi \, ds + 2r d\theta = \gamma_{n2} dl \quad (6.4.1.1)$$

Her er  $\varphi$  og  $r$  funktioner af  $s$ , som bestemmes af flydebetingelsen. Linjens tangentretning skal være  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ .

Af (6.4.1.1) kan  $s$  bestemmes for en given sliplinje. Betragtes nemlig et langedeelement  $dl$  på linjen, fås

$$\cos\varphi \, ds + 2r d\theta = \gamma_{n2} dl \quad (6.4.1.2)$$

$$\kappa dl = d(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) = d\theta - \frac{1}{2} \varphi' ds \quad (6.4.1.3)$$

hvor  $\kappa$  er linjens krumning. Heraf fås

$$ds = \frac{\gamma_{n2} - 2r\kappa}{\cos\varphi + r\varphi'} dl \quad (6.4.1.4)$$

$$d\theta = \frac{\frac{1}{2} \gamma_{n2} \varphi' + \kappa \cos\varphi}{\cos\varphi + r\varphi'} dl \quad (6.4.1.5)$$

Hvis linjen skal være en flytningsdiskontinuitetslinje mellem to stive legemer, skal den "lokale" bevægelse passe sammen med den "globale", dvs. at den anden sliplinjeretning, b-retningen med retningsvinklen  $\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ , skal stå vinkelret på den relative bevægelsesretning. Det betyder for en relativ translation, at  $\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$  skal være konstant. For en rotation skal en ret linje gennem et vilkårligt punkt på sliplinjen med denne retning gå igennem det relative rotationscenter. Også linjens form bliver således bestemt af flydebetingelsen.

Idet afstanden til omdrejningscentret betegnes  $a$ , fås

$$d(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \cdot a = a(d\theta + \frac{1}{2} \varphi' ds) = \cos \varphi dl$$

$$\cos \varphi ds + 2r d\theta = \gamma_{n2} dl$$

$$da = dl \sin \varphi$$

Heraf fås

$$ds = \frac{\gamma_{n2} - 2r \frac{\cos \varphi}{a}}{\cos \varphi - r \varphi'} dl \quad (6.4.1.6)$$

$$d\theta = \frac{\frac{\cos^2 \varphi}{a} - \frac{1}{2} \varphi' \gamma_{n2}}{\cos \varphi - r \varphi'} dl \quad (6.4.1.7)$$

$$da = dl \sin \varphi \quad (6.4.1.8)$$

Ved drejningen  $\eta$  fås dissipationen ved indsættelse af  $(\sigma_1, \sigma_2) = (-s+r, -s-r)$  i (6.2.5)

$$dD = a\eta(r-s \sin \varphi) dl \quad (6.4.1.9)$$

I de følgende afsnit findes flytningsdiskontinuitetslinjens form og spændingernes variation langs denne for forskellige flydebetingelser i et vægtløst materiale.

De flydelinjer, der vil blive fundet, vil ved multiplikation med et tal ud fra deres tilhørende omdrejningspunkt føres over i andre flydelinjer, som opfylder de samme ligevægtsligninger. Alle dimensionsløse forhold vil nemlig være uændrede (så længe der ikke er nogen rumvægt). Alle flydelinjerne indeholder således en arbitrær længdeangivelse.

Det viser sig for de betragtede eksempler, at selv mindre ændringer af flydefladen medfører ret store ændringer af de optimale flydelinjer. Krumningen kan f.eks. skifte fortegn. Da alle flydeflader er matematiske, simplificerede tilnærmelser til nogle ukendte flydeflader for de virkelige materialer, skal man derfor ikke forvente at kunne finde alle de matematisk beregnede optimale flydelinjer i et prøvelegeme efter brud.

#### 6.4.2 Coulomb-materiale

Af Coulombs flydebetingelse (3.1), hvor  $c$  og  $\varphi$  er konstanter, fås

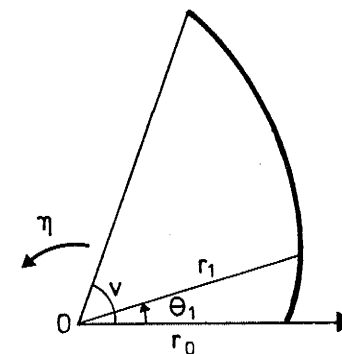
$$r = c \cos \varphi + s \sin \varphi \quad (6.4.2.1)$$

Vinklen mellem sliplinjerne er konstant  $\frac{\pi}{2} + \varphi$ . Når b-linjerne går gennem omdrejningspunktet, bliver a-linjerne derfor logaritmiske spiraler med stigningsvinkel  $\varphi$ , dvs. i et polært  $r, \theta$ -koordinatsystem

$$r_1 = r_0 e^{\theta_1 \tan \varphi} \quad (6.4.2.2)$$

se figur 6.4.2.1. Hovedretningen bliver

$$\theta = \theta_1 + \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (6.4.2.3)$$



Figur 6.4.2.1 Optimal sliplinje for Coulombmateriale, logaritmisk spiral.



Spændingerne bliver

$$s = (s_0 + c \cot \varphi) e^{-2\sigma_1 \tan \varphi} - c \cot \varphi \quad (6.4.2.4)$$

Ved beregning af dissipationen bemærkes, at vi for alle spændinger kan vælge punktet  $(\sigma_1, \sigma_2) = (c \cot \varphi, c \cot \varphi)$ , hvorved den specifikke dissipation bliver  $c \cot \varphi$  multipliceret med  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , som er lig med den specifikke volumenudvidelse. Dette gælder også for den totale dissipation ved drejningen  $\eta$ :

$$\begin{aligned} D &= c \cot \varphi \cdot \Delta V \\ &= \frac{1}{2} c \eta r_0^2 \cot \varphi (e^{2v \tan \varphi} - 1) \end{aligned} \quad (6.4.2.5)$$

For  $\varphi = 0$  fås ved en grænseovergang

$$D = c \eta r_0^2 v \quad (6.4.2.6)$$

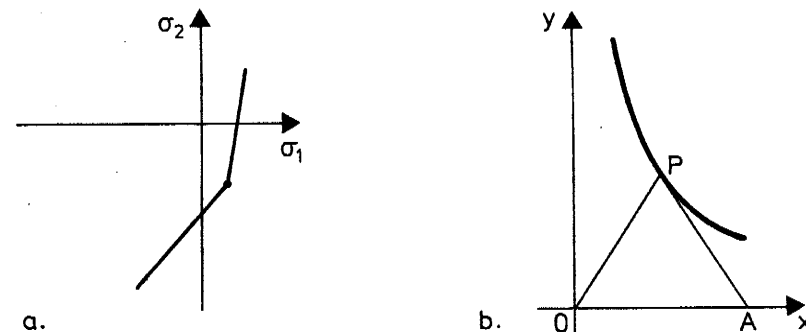
Resultaterne kan naturligvis findes ved indsættelse af (6.4.2.1) og  $\varphi' = 0$ ,  $\gamma_{n2} = 0$  i (6.4.1.6-9).

### 6.4.3 Hjørne på flydefladen

Ved et hjørne på flydefladen i  $\sigma_1 \sigma_2$ -planen er  $\varphi$  diskontinuert, se figur 6.4.3.1a. Det betyder, at  $\varphi'$  skal gå mod uendelig, hvorved (6.4.1.6) og (6.4.1.7) giver  $ds = 0$  og  $d\sigma = 0$ . Spændingstilstanden langs sliplinjen er hermed homogen. Indlægges et retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt i omdrejningspunktet og akser langs hovedretningerne, ses det jvf figur 6.4.3.1b, at hvis sliplinjen skal gå igennem P, skal den have tangentretningen PA, hvor trekant OPA er ligebenet ( $\angle POA = \angle PAO$ ). PO og PA er nemlig tangenter til sliplinjerne i P, og hovedretningerne skal være vinkelhalveringslinjer til disse retninger.

De kurver, der tilfredsstiller denne betingelse, er foruden koordinataksene de retvinklede hyperbler med koordinataksene som asymptoter

$$xy = c \quad (6.4.3.1)$$



Figur 6.4.3.1 a. Hjørne på flydefladen og b. tilsvarende sliplinje (hyperbelgren).

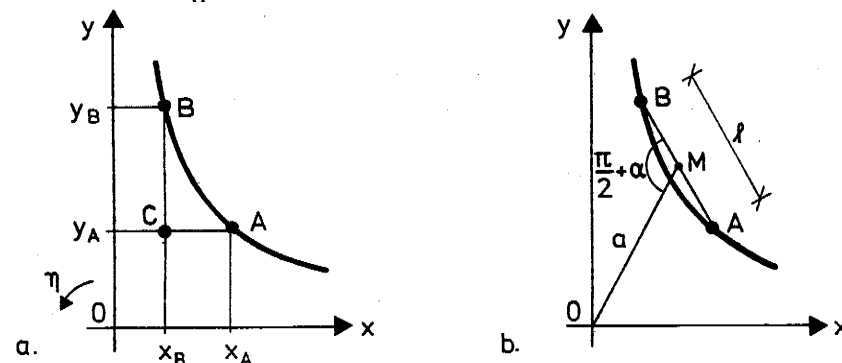
Disse hyperbler blev fundet af Jesper F. Jensen, se [81.1], ved at optimere dissipationen som en funktional af flydelinjeforløbet mellem to givne punkter, dvs. efter optimeringsprincippet.

Da en homogen spændingstilstand er i ligevægt, er dissipationen i sliplinjen AB på figur 6.4.3.2a lig med det ydre arbejde i den ved drejningen, og dette er igen lig med det ydre arbejde i linjerne AC og CB tilsammen, da ABC er i ligevægt. Dissipationen kan da findes som

$$D = \eta (\sigma_1 (y_B - y_A) \frac{y_B + y_A}{2} - \sigma_2 (x_A - x_B) \frac{x_A + x_B}{2}) \quad (6.4.3.2)$$

Med udnyttelse af (6.4.3.1) kan dette skrives

$$D = \frac{\eta}{2} (\sigma_1 \frac{y_A^2}{x_A} - \sigma_2 (x_A^2 - x_B^2)) \quad (6.4.3.3)$$



Figur 6.4.3.2 a. Beregning af dissipation i hyperbelformet sliplinje. b. Formel beregning ud fra kordens midtpunkt.

Der indføres kordelængden  $l$  af AB, afstanden  $a$  fra O til kordens midtpunkt M og vinklen  $\alpha$  mellem korden og flytningen ved M, se figur 6.4.3.2b. Langs hyperblen varierer vinklen mellem flytning og flydelinje; den indførte størrelse  $\alpha$  er en slags gennemsnit af denne vinkel.

Da koordinataksene er vinkelhalveringslinjer til vinklerne mellem AB og OM (en egenskab ved hyperblen), er retningsvinklerne for OM og AB henholdsvis  $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$  og  $\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ . Heraf følger, at

$$\frac{x_A + x_B}{2} = a \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right); \quad \frac{y_A + y_B}{2} = a \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x_A - x_B = l \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right); \quad y_B - y_A = l \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Indføres dette i (5.4.3.2), fås

$$D = \frac{1}{2} \eta l a (\sigma_1 (1 + \sin \alpha) - \sigma_2 (1 - \sin \alpha)) \quad (6.4.3.4)$$

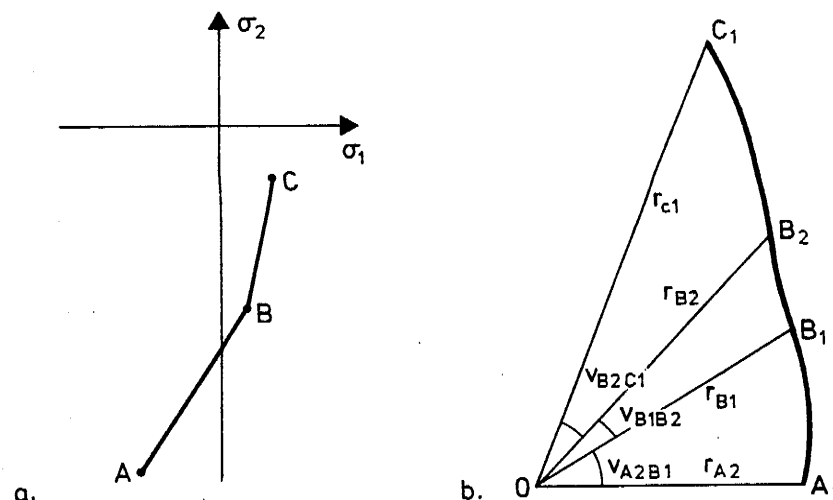
Ved sammenligning med (6.2.5) ses, at dissipationen i sliplinjen AB kan beregnes ved at beregne (formelt) dissipationen i kordens midtpunkt og multiplicere denne med kordens længde.

Hvis kun punkterne A, B og O er givet, er hovedretningerne som nævnt vinkelhalveringslinjerne til AB og OM, hvor M er AB's midtpunkt, og dissipationen er givet ved (6.4.3.4).

Da en hyperbelgren kun forløber i et kvadrant, kan den hyperbelformede sliplinje kun anvendes, hvis vinklen mellem OA og OB på figur 6.4.3.2a er spids. Den optimale sliplinje vil, hvis vinklen er stump, ifølge Jesper F. Jensen bestå af linjestykkerne AO og OB.

#### 6.4.4 Polygonal flydeflade

Hvis flydefladen er en polygon i  $\sigma_1\sigma_2$ -planen, se figur 6.4.4.1a, vil sliplinjen for de spændinger, der ligger på linjestykkerne mellem hjørnerne, være spiralbuer med hver sin stigningsvinkel, se figur 6.4.4.1b. Imellem disse vil der være hyperbelbuer, hvori spændingerne ligger på de tilsvarende hjørner på flydefladen.



Figur 6.4.4.1 a. Polygonal flydeflade.  
b. Tilhørende sliplinje bestående af spiral- og hyperbelbuer.

Sliplinjens form beskrives ved afstandene fra O til overgangspunkterne  $r_{A2}$ ,  $r_{B1}$ ,  $r_{B2}$ ,  $r_{C1}$ , ... og de enkelte buers centervinkler  $v_{A2B1}$ ,  $v_{B1B2}$ ,  $v_{B2C1}$ , ...

For en spiralbue fås af (6.4.2.4)

$$s_B = (s_A + c_{AB} \cot \varphi_{AB}) e^{-2v_{A2B1} \tan \varphi_{AB}} - c_{AB} \cot \varphi_{AB} \quad (6.4.4.1)$$

Af (6.4.2.1) følger

$$\varphi_{AB} = \arcsin \frac{r_B - r_A}{s_A - s_B} \quad (6.4.4.2)$$

Skæringspunktet mellem linjen gennem A og B og linjen  $\sigma_1 = \sigma_2$  på figur 6.4.4.1a har begge koordinater lig med

$$c_{AB} \cot \varphi_{AB} = \frac{s_A r_B - s_B r_A}{r_A - r_B} \quad (6.4.4.3)$$

Heraf fås

$$\begin{aligned} v_{A2B1} &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r_A}{r_B} \right) \cot \varphi_{AB} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r_A}{r_B} \right) \sqrt{\left( \frac{s_A - s_B}{r_A - r_B} \right)^2 - 1} \end{aligned} \quad (6.4.4.4)$$

$$\frac{r_{B1}}{r_{A2}} = \sqrt{\frac{r_A}{r_B}} \quad (6.4.4.5)$$

Dissipationen ved drejningen  $\eta$  om O fås herefter af (6.4.2.5)

$$D_{A2B1} = \frac{1}{2} \eta r_{A2}^2 (s_A - s_B \frac{r_A}{r_B}) \quad (6.4.4.6)$$

For  $r_A = r_B$  ( $\varphi_{AB} = 0$ ) bliver (6.4.4.4-6)

$$v_{A2B1} = \frac{1}{2} \frac{s_A - s_B}{r_B} \quad (6.4.4.7)$$

$$\frac{r_{B1}}{r_{A2}} = 1 \quad (6.4.4.8)$$

$$D_{A2B1} = \frac{1}{2} \eta r_{A2}^2 (s_A - s_B) \quad (6.4.4.9)$$

For en hyperbelbue fås

$$\begin{aligned} v_{B1B2} &= \frac{\varphi_{BC} - \varphi_{AB}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{r_C - r_B}{s_C - s_B} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r_B - r_A}{s_B - s_A} \end{aligned} \quad (6.4.4.10)$$

Hyperblens ligning  $xy = \frac{1}{2} c^2$  er i polære  $(r, \theta_1)$  - koordinater

$$r = \frac{c}{\sqrt{\sin 2\theta_1}}$$

eller med  $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$  :

$$r = \frac{c}{\sqrt{\cos \varphi}}$$

Dette giver

$$\begin{aligned} \frac{r_{B2}}{r_{B1}} &= \sqrt{\frac{\cos \varphi_{AB}}{\cos \varphi_{BC}}} \\ &= 4 \sqrt{\frac{1 - \left( \frac{r_A - r_B}{s_A - s_B} \right)^2}{1 - \left( \frac{r_B - r_C}{s_B - s_C} \right)^2}} \end{aligned} \quad (6.4.4.11)$$

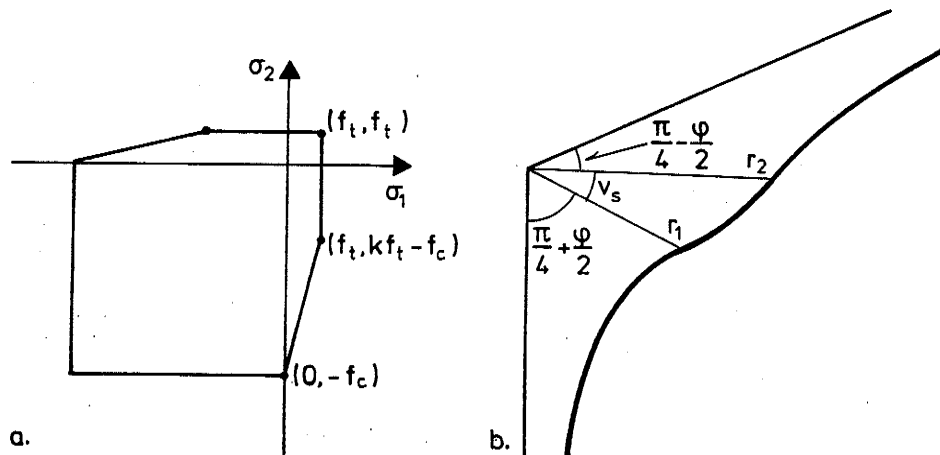
Ved hjælp af (6.4.4.11) og (6.4.3.2) fås dissipationen efter nogen regning:

$$D_{B1B2} = \frac{\eta r_{B1}^2}{2 \cos \varphi_{BC}} (r_B \sin(\varphi_{BC} - \varphi_{AB}) - s_B (\cos \varphi_{AB} - \cos \varphi_{BC})) \quad (6.4.4.12)$$

#### 6.4.5 Beton, plan spændingstilstand

Idet beton antages at følge Coulomb's modificerede flydebetingelse, ses flydebetingelsen for plan spændingstilstand på figur 6.4.5.1a. Der anvendes  $\varphi = \arctan 0.75 \approx 37^\circ$  svarende til  $k = 4$ , samt en trækstyrke  $f_t \leq f_c/k$ . Den optimale flydelinje består af to hyperbelbuer og en spiralbue som vist på figur 6.4.5.1b. Spiralbuens centervinkel bliver ifølge (6.4.4.4)

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{1}{2} f_c}{\frac{1}{2} f_c - \frac{k-1}{2} f_t} \right) \frac{2\sqrt{k}}{k-1} \\ &= - \frac{\sqrt{k}}{k-1} \ln \left( 1 - (k-1) \frac{f_t}{f_c} \right) \end{aligned} \quad (6.4.5.1)$$



Figur 6.4.5.1 a. Flydebetingelse for beton og b. tilhørende sliplinje med en spiral- og to hyperbelbuer.

Forholdet mellem længderne af de to radier, der begrænser spiralbuen er ifølge (6.4.4.5)

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1} &= \sqrt{\frac{\frac{1}{2} f_c}{\frac{1}{2} f_c - \frac{k-1}{2} f_t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (k-1) \frac{f_t}{f_c}}} \end{aligned} \quad (6.4.5.2)$$

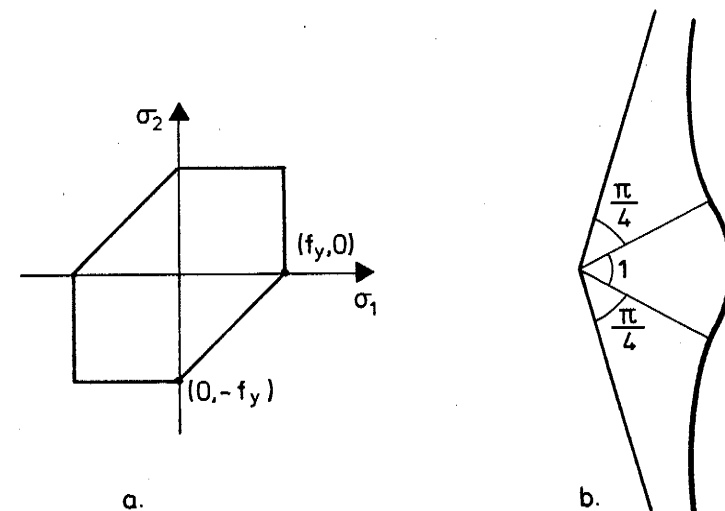
Dissipationen i en kurve, som indeholder alle tre dele, er

$$D = \frac{\eta r_1^2 f_c}{4} \left( \frac{\cos \alpha_1}{\cos \varphi} (1 - \frac{\mu}{\lambda}) + 1 - \sin \alpha_1 - \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} (\frac{\mu}{\lambda} - \sin \alpha_2) \right)$$

Her er  $\alpha_1$  vinklen mellem flydelinje og flytning ved begyndelsen af kurven (hvor der er størst tryk).  $\alpha_2$  er den tilsvarende vinkel i kurvens anden ende. Der gælder  $\alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_2$ .  $r_1$  er afstanden fra omdrejningscentret til kurvens begyndelsespunkt.  $\lambda$  og  $\mu$  er indført i (3.10).

#### 6.4.6 Tresca-materiale i plan spændingstilstand

Et Tresca-materiale er et Coulomb-materiale med  $\varphi = 0$ . Flydebetingelsen i plan spændingstilstand ses på figur 6.4.6.1a. I hjørnerne  $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, -f_y)$  og  $(\sigma_1, \sigma_2) = (f_y, 0)$  haves henholdsvis  $(s, r) = (\frac{1}{2} f_y, \frac{1}{2} f_y)$  og  $(s, r) = (-\frac{1}{2} f_y, \frac{1}{2} f_y)$ . Den optimale flydelinje kommer til at bestå af en cirkelbue, hvis centervinkel ifølge (6.4.4.7) er 1 (radian), samt en hyperbelbue på hver side af denne, se figur 6.4.6.1b. Hyperbelbuenes centervinkel er  $\frac{\pi}{4}$ .



Figur 6.4.6.1 a. Flydeflade for Tresca-materiale. b. Tilsvarende sliplinje bestående af en cirkelbue og to hyperbelbuer.

### 6.4.7 Krum flydeflade

Da enhver flydeflade kan tilnærmes med en polygon, kan den nu behandles. En krum flydeflade kan dog også behandles direkte. Dette kan generelt gøres således: Af sliplinjelningen (6.4.1.1) med  $r_{n2} = 0$  findes  $\theta$

$$\theta = \int d\theta = - \int \frac{\cos\varphi}{2r} ds \quad (6.4.7.1)$$

Her er  $\varphi$  og  $r$  kendte funktioner af  $s$ . Angives kurven i et polært  $r_1\theta_1$ -koordinatsystem med pol i omdrejningspunktet, kan  $r_1$  findes af (6.4.4.5) og (6.4.4.11):

$$\frac{r_1}{r_{10}} = \sqrt{\frac{r_0 \cos\varphi_0}{r \cos\varphi}} \quad (6.4.7.2)$$

Vinklen mellem første hovedspændingsretning og radius vektor er  $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ :

$$\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (6.4.7.3)$$

og hermed er  $r_1$  og  $\theta_1$  fundet som funktioner af  $s$ , og kurven er således fundet.

### 6.4.8 Von Mises-materiale i plan spændingstilstand

For et von Mises-materiale i plan spændingstilstand er flydebetingelsen, som er vist på figur 6.3.2,

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = f_y^2 \quad (6.4.8.1)$$

Heraf fås, da  $\sigma_1 = -s+r$ ,  $\sigma_2 = -s-r$  og  $r \geq 0$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{f_y^2 - s^2} \quad (6.4.8.2)$$

$$\sin\varphi = r' = \frac{-s}{\sqrt{3} \sqrt{f_y^2 - s^2}} \quad (6.4.8.3)$$

$$|\sin\varphi| \leq 1 \Rightarrow |s| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} f_y$$

Der indsættes i (6.4.7.1)

$$\begin{aligned} \theta &= - \int \frac{\cos\varphi}{2r} ds \\ &= - \int \frac{\sqrt{\frac{3}{4} f_y^2 - s^2}}{f_y^2 - s^2} ds \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{s}{\sqrt{3f_y^2 - 4s^2}} - \arcsin \frac{2s}{\sqrt{3}f_y} \end{aligned} \quad (6.4.8.4)$$

(6.4.7.3) giver

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{s}{\sqrt{3f_y^2 - 4s^2}} - \arcsin \frac{2s}{\sqrt{3}f_y} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{s}{\sqrt{3(f_y^2 - s^2)}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{2s}{\sqrt{3}f_y} \end{aligned} \quad (6.4.8.5)$$

Af (6.4.7.2) fås med  $s_0 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{a} &= \sqrt{\frac{r_0 \cos\varphi_0}{r \cos\varphi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} \left(\frac{s}{f_y}\right)^2}} \end{aligned} \quad (6.4.8.6)$$

Et retvinklet  $xy$ -koordinatsystem indlægges med begyndelsespunkt i polen og  $r_1$ -aksen som vinkelhalveringslinje i første kvadrant. Kurven får heri parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= r_1 \cos(\theta_1 + \frac{\pi}{4}) \\ &= a \frac{\sqrt{3}f_y}{\sqrt{1 - \frac{4s^2}{3f_y^2}}} \end{aligned} \quad (6.4.8.7)$$

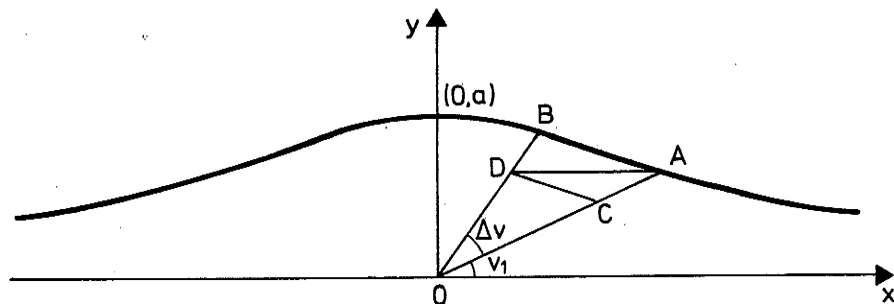
$$y = r_1 \sin(\theta_1 + \frac{\pi}{4})$$

$$= a \sqrt[4]{1 - \frac{4s^2}{3f_y^2}} \quad (6.4.8.8)$$

Ved elimination af  $\frac{2s}{\sqrt{3}f_y}$ , fås kurvens ligning

$$y^4 + y^2 x^2 - a^4 = 0 \quad (6.4.8.9)$$

Denne kurve, som ses på figur 6.4.8.1, er også fundet af Jesper F. Jensen i [81.1] ved optimeringsprincippet.



Figur 6.4.8.1 Optimal sliplinje for et von Mises-materiale.

Tænkes punkterne O, A og B givet ved størrelserne  $r_1 = |OA|$ ,  $r_2 = |OB|$  og  $\Delta v = \angle BOA$ , positiv når OA er højre ben i vinklen, er vinklen fra x-aksen til OA  $v_1$ , hvor

$$\tan v_1 = \frac{r_2^2 \sin \Delta v}{r_1^2 - r_2^2 \cos \Delta v} \quad (6.4.8.10)$$

Kurvens ligning i xy-koordinatsystemet er (6.4.8.9), hvor

$$a^2 = r_1^2 \sin v_1$$

Ved at indsætte  $dl = -\frac{r_1'}{\sin v_1} ds$  i (6.4.1.9) får man dissipationen ved drejningen  $\eta$

$$D = -\eta \int r_1 r_1' \left( \frac{r}{\sin v} - s \right) ds$$

$$= -\eta \int \frac{a}{\sqrt[4]{1 - \frac{4}{3}(\frac{s}{f_y})^2}} \cdot \frac{-\frac{2}{3}a \frac{s}{f_y^2}}{(1 - \frac{4}{3}(\frac{s}{f_y})^2)^{5/4}} \left( -\frac{f_y^2 - s^2}{s} - s \right) ds$$

$$= -\frac{2\eta a^2}{3} \int \frac{1}{(1 - \frac{4}{3}(\frac{s}{f_y})^2)^{3/2}} ds$$

$$= \frac{2\eta a^2}{3} \left( \frac{s_1}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}(\frac{s_1}{f_y})^2}} - \frac{s_2}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}(\frac{s_2}{f_y})^2}} \right)$$

Ved hjælp af (6.4.8.7) og (6.4.8.8) omformes dette til

$$D = \frac{\eta a^2 f_y}{\sqrt{3}} \left( \frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} \right)$$

som med (6.4.8.10) og  $\frac{x_1}{y_1} = \cot v_1$  og  $\frac{x_2}{y_2} = \cot(v_1 - \Delta v)$  kan skrives

$$D = \frac{\eta f_y}{\sqrt{3}} \sqrt{r_1^4 + r_2^4 - 2r_1^2 r_2^2 \cos \Delta v} \quad (6.4.8.11)$$

Den følgende geometriske fremgangsmåde fører til samme resultat, se figur 6.4.8.1. Flydelinjen skal forbinde A og B, og rotationen skal ske om O. Find punkt C på OA, så  $|OC| = |OB|$ . Find punkt D på OB, så  $DC \parallel BA$ . x-aksen for det koordinatsystem, hvori kurven har ligningen (6.4.8.9), er nu parallel med DA. Dissipationen er

$$D = \frac{\eta f_y}{\sqrt{3}} |OA| \cdot |DA|$$

#### 6.4.9 Materiale med rette flydelinjer

Da spiralerne og hyperblerne krummer hver sin vej, er det muligt at finde en konveks flydeflade, for hvilken de optimale flydelinjer er rette.

Af (6.4.1.3) fås, da  $\kappa = 0$

$$d\theta = \frac{1}{2} \varphi' ds$$

Herefter giver (6.4.1.2) med  $\gamma_{n2} = 0$

$$\cos\varphi + r\varphi' = 0$$

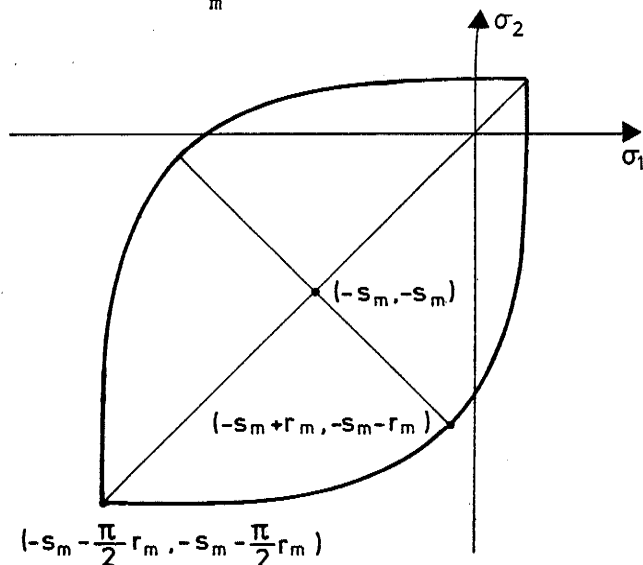
Med (4.10) fås

$$\cos\varphi + r \frac{r''}{\cos\varphi} = 0$$

$$1 - (r')^2 + rr'' = 0 \quad (6.4.9.1)$$

Løsningen hertil er, da  $|r'| \leq 1$

$$r = r_m \cos\left(\frac{s-s_m}{r_m}\right) \quad (6.4.9.2)$$

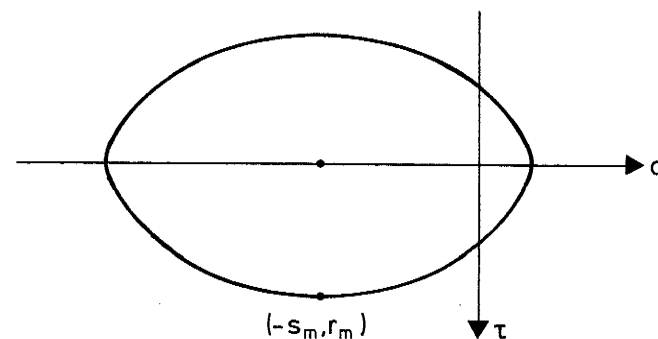


Figur 6.4.9.1 Flydeflade med to cosinusbuer.

Her er  $r_m$  og  $s_m$  to arbitrære konstanter. Flydefladen består altså af de to på figur 6.4.9.1 viste cosinusbuer. Den tilsvarende kurve i Mohr's plan har parameterfremstillingen

$$(\sigma, \tau) = (-s_m + r_m(\alpha + \cos\alpha \sin\alpha), \pm r_m \cos^2\alpha) \quad (6.4.9.3)$$

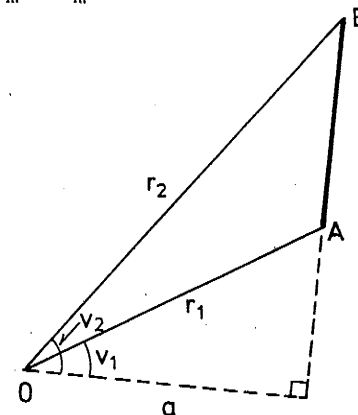
$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$



Figur 6.4.9.2 I Mohr's plan fås to cykloidebuer.

Den består af de to på figur 6.4.9.2 viste cykloidebuer. Her er  $\alpha$  vinklen mellem flydelinje og flytningsretning. Flydebetingelsen udtrykkes også i

$$(s, r) = (s_m - r_m \alpha, r_m \cos\alpha) \quad (6.4.9.4)$$



Figur 6.4.9.3 Optimal, ret sliplinje. Beregning af dissipation.

Dissipationen fås ved at indsætte (6.4.9.4) i (6.4.1.9), og bliver med betegnelserne på figur 6.4.9.3

$$D = \int_{v_1}^{v_2} \frac{a\eta}{\cos\alpha} (r_m(\alpha \sin\alpha + \cos\alpha) - s_m \sin\alpha) \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

$$= a^2 \eta \left( r_m \left( \frac{v_2 + \sin v_2 \cos v_2}{2 \cos^2 v_2} - \frac{v_1 + \sin v_1 \cos v_1}{2 \cos^2 v_1} \right) - s_m \left( \frac{1}{2 \cos^2 v_2} - \frac{1}{2 \cos^2 v_1} \right) \right)$$

$$= \frac{\eta}{2} \left( r_m^2 (v_2 + \sin v_2 \cos v_2) - r_1^2 (v_1 + \sin v_1 \cos v_1) - s_m (r_2^2 - r_1^2) \right)$$

Med denne flydebetingelse, vil en fastlæggelse af de enkelte stive områder i en mekanisme, samt deres bevægelser være meget simpel, da den enkelte flydelinjes form ikke afhænger af dens placering i forhold til det relative rotationscentrum.

### 6.5 Rumvægt

Med rumvægten kommer en ekstra parameter med i sliplinjeligningen, som for en a-linje bliver

$$\cos\varphi ds + 2r d\theta = \gamma_{n2} dl \quad (6.5.1)$$

$$\gamma_{n2} = \gamma_x \cos(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + \gamma_y \sin(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \quad (6.5.2)$$

Bemærk, at  $\gamma_{n2}$  er rumvægtens projektion i flytningens retning. Det skal stadig gælde, at tangenterne til b-karakteristikkerne skal gå igennem omdrejningspunktet.

Med et givet startpunkt, samt linjens tangentretning og spændingen her, kan linjen og dissipationen ved drejningen findes ved integration af (6.4.1.6-9).

Hvis  $\varphi$  er konstant, bliver kurven en logaritmisk spiral med stigningsvinkel  $\varphi$ .

Ved knæpunkter på flydefladen i  $\sigma_1\sigma_2$ -planen er  $\varphi$  diskontinuert. Ved at lade  $\varphi'$  gå mod uendelig i (6.4.1.6-7) fås

$$ds = 0 \quad (6.5.3)$$

$$d\theta = \frac{\gamma_{n2}}{2r} dl \quad (6.5.4)$$

$$d\varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \varphi' ds$$

$$= \left( \frac{2 \cos\varphi}{a} - \frac{\gamma_{n2}}{r} \right) dl \quad (6.5.5)$$

Tilfældet ren translation og konstant rumvægt bliver her simpelt. Det fås ved at sætte  $\frac{1}{a} = 0$ :

$$d\varphi = - \frac{\gamma_{n2}}{r} dl, \quad d\theta = \frac{\gamma_{n2}}{2r} dl \Rightarrow$$

$$d\theta + \frac{1}{2} d\varphi = 0$$

Heraf fås af (6.5.2), at  $\gamma_{n2}$  er konstant, og at linjens krumning bliver

$$\kappa = \frac{d\theta - \frac{1}{2} d\varphi}{dl} = \frac{\gamma_{n2}}{r} \quad (6.5.6)$$

Da krumningen er konstant, er sliplinjen en cirkelbue med radius  $\frac{r}{\gamma_{n2}}$ .



## 7. Trykstyrken af stænger og cylindre

### 7.1 Indledning

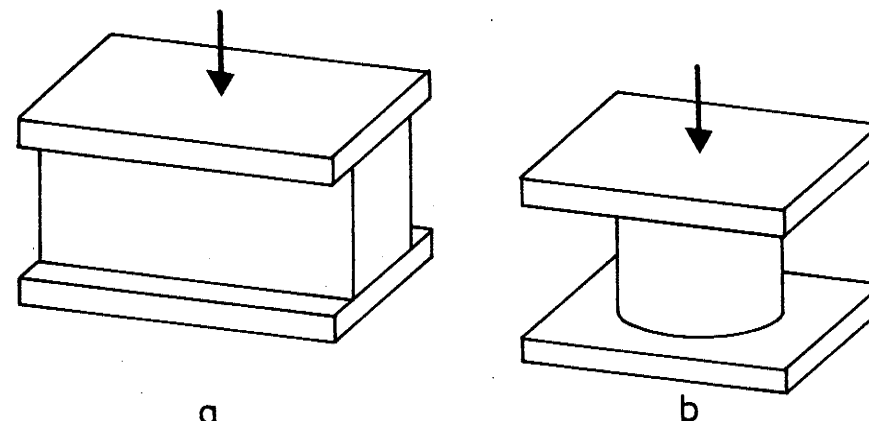
Trykstyrken af beton er gennem tiden blevet bestemt på prøvelegemer af forskellige størrelser og former. Mest anvendt er terningen, ofte med en sidelinje på 20 cm, og cylinderen med en diameter på 15 cm og en højde på 30 cm. Prøvelegemerne anbringes i en prøvemaskine, evt. med mellemlæg af bløde træfiberplader, og belastes til brud, terningen på to modstående sider og cylinderen på endefladerne. Trykstyrken defineres som brudkraften divideret med det belastede areal.

Det er velkendt, at trykstyrken af en terning er større end trykstyrken af en betoncylinder med højde/diameterforholdet  $h/d = 2$ . Andre ting har dog også indflydelse på bæreevnen, f.eks. trykpladernes ruhed og stivhed. Den absolutte størrelse af prøvelegemet påvirker også styrken, jo større prøvelegeme, jo lavere styrke.

Den sidstnævnte effekt kan ikke behandles i en rent plastisk model. Indflydelsen af trykpladernes stivhed kan heller ikke findes i en model, hvor tøjningernes og flytningernes absolutte størrelse ikke indgår. Derimod kan ruheden af trykpladerne behandles med en plastisk model, ligesom indflydelsen af prøvelegemets form kan findes. Disse parametre vil blive undersøgt i de næste to afsnit. Afsnit 7.2 omhandler plan deformationstilstand svarende til tryk på de to modstående sider af et langt prisme, og i afsnit 7.3 behandles rotationssymmetrisk tilstand svarende til tryk på enderne af en cirkulær betoncylinder, se figur 7.1.1. Det cylindriske prøvelegeme hører således hjemme i afsnit 7.3, mens det terningformede ikke beskrives eksakt nogen af stederne. Der kan dog angives visse grænser for dets bæreevne, se afsnit 7.4.

Ved at overføre belastningen fra prøvemaskinens lastplader til prøvelegemet gennem mellemlæg af blød træfiberplade opnås, at små ujævnheder i betonens overflade ikke får indflydelse på trykfordelingen, som herved bliver mere jævn. Der opnås herved en mindre spredning på forsøgsresultaterne. Den bløde plade vil dog også virke ligesom den svage mørtelfuge mellem stærke mursten, jvf. kapitel 11: for at kunne overføre belastningen må den påvirkes med forskydningskræfter i overgangen til betonen. Trykket bliver

herved større ved midten af pladen end nær ved dens kanter. Virkningen af denne kraftkoncentration på betonprøvelegemet er, at bæreevnen bliver lidt mindre, og at trækstyrken muligvis får indflydelse på den.



Figur 7.1.1 Trykstyrkemodeller: a. plan deformationstilstand, b. rotationssymmetrisk tilstand.

### 7.2 Plan deformationstilstand

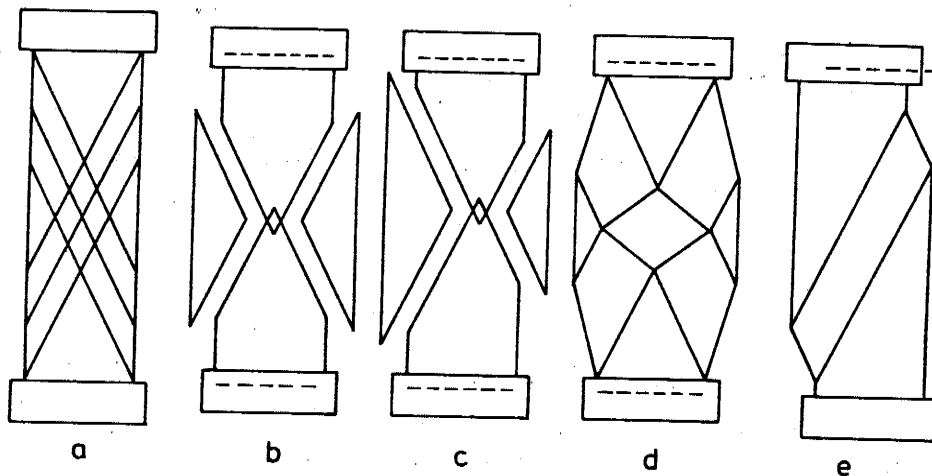
Der betragtes et langt betonprisme med sidelængderne  $b$  og  $h$ , kaldet bredden og højden. Prismet er belastet langs over- og undersiden, dvs. siderne med længden  $b$ , med et tryk, som overføres gennem to uendeligt stive og stærke lastplader. Trykket påføres centralt og vinkelret på sidefladerne. Prismets længde er så stor, så der kan regnes med plan deformationstilstand i planer vinkelret på prismets længdeakse. Trykket bliver herved jævnt fordelt over længden og kan beskrives ved  $P$ : kraften pr. længdeenhed af prismet.

I overgangen mellem beton og lastplade overføres nogle forskydnings- og normalspændinger,  $\tau$  og  $\sigma$ . Disse spændinger skal overholde en friktionsbetingelse med friktionsvinklen  $\varphi_p$ :

$$|\tau| \leq -\sigma \tan \varphi_p$$

Materialet er et Coulomb-materiale med den enaksede trykstyrke  $f_c$  og friktionsvinklen  $\varphi$ . Så længe lastpladerne dækker hele prismets side, vil der ikke opstå træk i prismet, og løsningen vil derfor være uafhængig af materialets trækstyrke.

Hvis  $h/b \geq \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$ , er løsningen simpel: bæreevnen er den enaksede trykstyrke multipliceret med det belastede areal:  $P = b f_c$ . Mekanismen er ikke entydig. På figur 7.2.1 er vist fire forskellige muligheder.



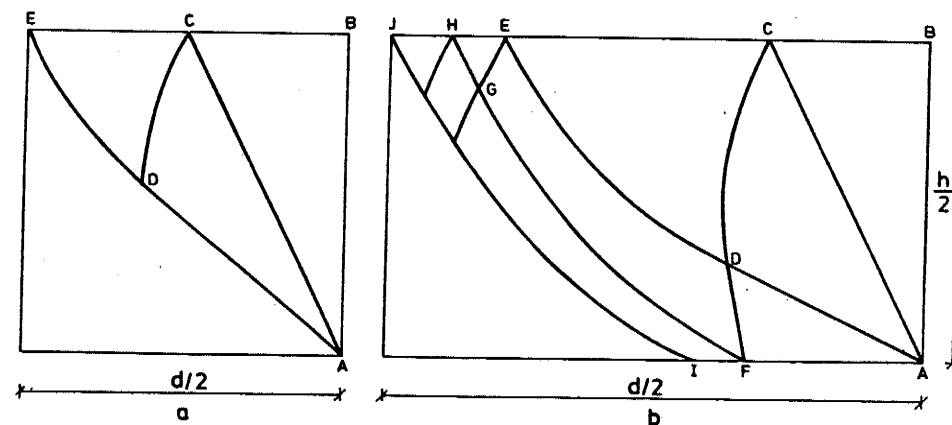
Figur 7.2.1 Sliplinjer og mulige mekanismer for  $h/d > \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$ .

I mekanismerne på figur 7.2.1 b. og c., hvor to spidsvinklede kiler presses mod hinanden, bevæges tilsyneladende noget stof ind i noget andet, og dette er i modstrid med, at et Coulomb-materiale ikke ved en plastisk deformation kan få formindsket sit rumfang. Man kan imidlertid tænke sig, at materialet har en endelig, omend høj, trykstyrke ved deformation med volumenformindskelse. Nu sker sammentrykningen ved spidsen med denne trykspænding. Ved en øvreværdiberegning på denne mekanisme vil den

høje trykstyrke blive multipliceret med en størrelse, som er proportional med kvadratet på sammentrykningen. For små flytninger vil bidraget således forsvinde i forhold til de øvrige led, og det er derfor ingen fejl at negligere den slags punkt-vise tilsyneladende urimeligheder, så længe der ikke regnes med endelige flytninger.

Bæreevnen er her uafhængig af lastpladernes ruhed, da den ikke kræver overførsel af forskydningsspændinger til disse. Hvis imidlertid lastpladerne er helt glatte, fås den samme løsning,  $P = b f_c$ , også for mindre værdier af forholdet mellem højde og bredde,  $h/b$ . I de øvrige tilfælde, dvs. for  $h/b < \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$  og  $\varphi_p > 0$ , fås en mere kompliceret løsning.

På figur 7.2.2 er vist sliplinjefelterne svarende til  $\varphi = 37^\circ$ ,  $\varphi_p = 30^\circ$  og henholdsvis  $h/d = 1,0$  og  $h/d = 0,6$ . Kun den fjerdedel, der ligger under og til højre for de to symmetriakser, er vist.



Figur 7.2.2 Sliplinjefelter ved sammentrykning.  $\varphi = 37^\circ$ ,  $\varphi_p = 30^\circ$ . a.  $h/d = 1,0$ , b.  $h/d = 0,6$ .

Område ABC er en trekantformet Rankine-zone, hvori der er homogent, enakset tryk i lodret retning. ADC er en Prandtl-zone, hvis centervinkel er begrænset af, at spændingerne på lastpladen ikke må overskride flydebetingelsen her. CDE er en zone, som er bestemt af spiralen CD og symmetrilinjen CE.

For  $h/d = 1,0$  ligger punkt E på den lodrette symmetrilinje, og spiralens centervinkel i A er så lille, at friktionsbetingelsen langs lastpladerne ikke kommer i funktion.

For  $h/d = 0,6$  er den lodrette symmetrilinje ikke nået selv med den maksimale centervinkel i A, og der må derfor være flydning også i en zone langs lastpladen. Spændingerne her må opfylde friktionsbetingelsen, og med denne betingelse og symmetribetingelsen langs linjen BC opbygges feltet, til den lodrette symmetrilinje nås i punkt J. Da spændingerne langs AD er konstante, og betingelsen langs AF er uafhængig af stedet, bliver spændingerne i hele området ADF homogene, og der fås en Rankine-zone her. Dette medfører, at b-linjerne i område FDEG bliver rette, og at EGH også bliver en Rankine-zone. Ved små værdier af forholdet  $h/b$  vil disse Rankine-zoner forekomme regelmæssigt langs linjerne gennem BC og AF. Hver af disse zoner vil dog være mindre end den forrige, så deres indflydelse på sliplinjefeltet vil mindskes, når feltet udvides mod venstre.

Hvis  $\varphi_p$  er tilstrækkelig stor, dvs. hvis lastpladen er tilstrækkelig ru, vil flydningen langs denne ske med betonens egen flydebetingelse. Lastpladen siges da at være fuldstændig ru. Den vil da blive indhyllingslinje for sliplinjerne. Hvis dette sker allerede fra punkt A på figur 7.2.2, vil Prandtl-zonens centervinkel CAD være  $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ , og AD vil ligge langs lastpladen. Rankine-zonerne ADF, EGH m.fl. vil da ikke eksistere, og feltet vil ikke indeholde rette sliplinjer udover dem i felterne ABC og ADC. Løsningen bliver et felt, hvis sliplinjer asymptotisk nærmer sig til cykloidekurverne i det passive felt, som er beskrevet i afsnit 5.5 og vist på figur 5.5.1.

Også når pladerne kun er delvis ru, vil sliplinjerne asymptotisk nærme sig til cykloidekurver, men nu kun til kurver svarende til en del af højden på figur 5.5.1. Kurverne vil indeholde rette linjestykker, men deres længde vil gå mod nul.

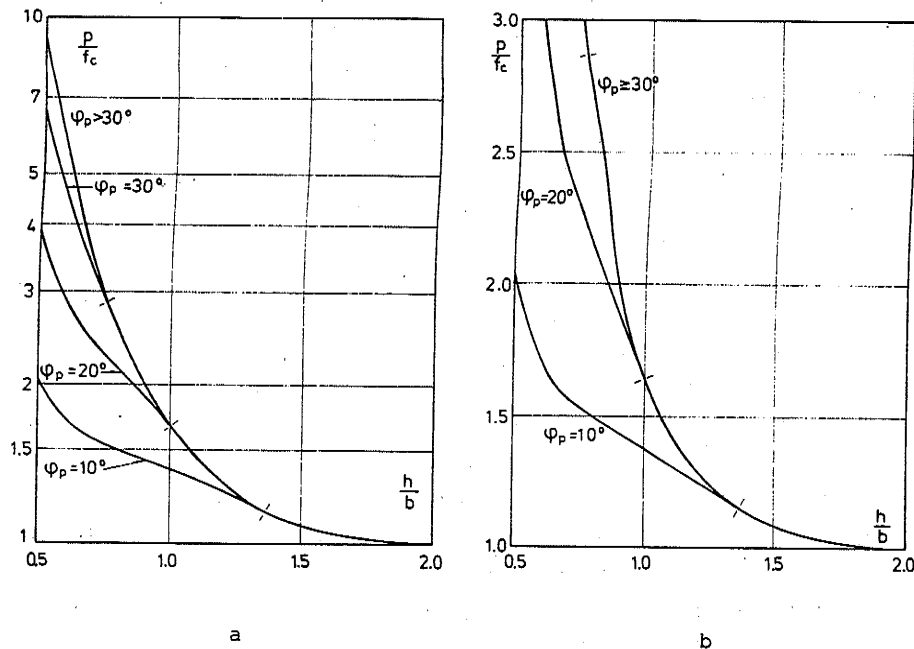
Bæreevnen kan findes ved integration af spændingerne langs linjen BC. I den første Rankine-zone vil spændingen være lig med betonens enaksede trykstyrke, men derefter vil den vokse. I hver Rankine-zone vil den dog, som tidligere nævnt, være konstant. Forskellige værdier af  $h/b$  kan undersøges ved at integrere fra B til forskellige punkter på linjen BC.

Bæreevnen er for  $\varphi = 37^\circ$  vist dimensionsløst som funktion af  $h/d$  og  $\varphi_p$  på figur 7.2.3. På ordinaten er afsat den gennemsnitlige trykspænding divideret med den enaksede trykstyrke.

Som nævnt er spændingerne konstante i hver Rankine-zone i sliplinjefeltet, jvf. figur 7.2.2. På bæreevnekurverne på figur 7.2.3 viser disse Rankine-zoner sig som retlinede stykker. Her varierer middelspændingen altså lineært med forholdet  $h/b$ . Hvis et af disse linjestykker forlænges til skæring med ordinataksen ( $h/b = 0$ ), vil den skære netop i det punkt, der angiver spændingen i Rankine-zonen. For et vilkårligt punkt på en af bæreevnekurverne gælder tilsvarende følgende regel: Spændingen i det tilsvarende punkt i prøvelegemets vandrette midtersnit kan aflæses i skæringspunktet mellem tangenten til bæreevnekurven og ordinataksen ( $h/b = 0$ ).

For alle felterne for begrænset ruhed af trykpladerne gælder, at det første sted langs prøvelegemets vandrette midtersnit, hvor de adskiller sig fra feltet for fuldstændig ru trykplader, er en Rankine-

zone, EGH på figur 7.2.2. Dette betyder på figur 7.2.3, at det første stykke, hvor en tilsvarende bæreevnekurve adskiller sig fra kurven for fuldstændig ruhed, er en ret linje. Denne tangerer naturligvis den sidstnævnte kurve.



Figur 7.2.3 Bæreevnen af prisme af Coulomb-materiale med friktionsvinkel på  $37^\circ$ .  
a. logaritmisk afbildning, b. lineær afbildning.

For at fastslå, at løsningen er en nedreværdi-løsning, skal det vises, at der overalt i legemet kan angives en statisk tilladelig, sikker spændingsfordeling. Dertil mangler området under og til venstre for IJ, se figur 7.2.2. Dette er muligt uden større problemer: sliplinjen IJ og symmetribetingelsen langs den lodrette symmetrilinje gennem J bestemmer netop et sliplinjefelt, som dækker hele det manglende område. Forskydningsspændingerne langs lastpladen vil i dette felt ikke overskride flydebetingelsen, når de ikke gjorde det ved punkt I. Løsningen er altså en nedreværdiløsning.

I virkeligheden vil spændingerne her dog også afhænge af de elastiske egenskaber, så de vil ikke nødvendigvis være dem, der hører til sliplinjefeltet.

For at fastslå, at løsningen også er en øvre værdi-løsning, skal der angives en mekanisme, der er i overensstemmelse med de fundne spændinger. Dette er også muligt. De to lastplader antages at translateres mod hinanden. Herved får punkter på IJ samme rent lodrette flytning opad. Flytningen af punkter på symmetrilinjen BC er vandret. Langs IFA antages flytningerne at følge den associerede flydelov, hvilket giver en relativ fjernelse af betonen fra lastpladen under en vinkel med lastpladen på  $\phi$  eller  $\phi_p$  afhængigt af, hvilken flydebetingelse der er aktuel. Betydningen af flytningsbetingelsen her diskuteres senere i kapitlet. Nu kan flytningen af ethvert punkt i sliplinjefeltet findes. I mekanismen bliver JIFA en flytningsdiskontinuitetslinje. Rankine-zonerne bliver ikke deformerede. Flytningen af punkt J er ikke entydig, da de to stive kiler bevæges med hver sin lastplade ind i hinanden.

Da løsningen således både er en øvre- og en nedreværdi, er den en korrekt plastisk løsning.

Den relative bevægelse af lastpladerne behøver ikke at stå vinkelret på dem. Den må danne en vinkel på op til  $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  med deres fælles normal, jvf. figur 7.2.1e. Når vinklen netop er  $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ , bliver kun den ene af de to grænsesliplinjer ved punkt J en flytningsdiskontinuitetslinje, men der vil være tøjninger i samme område som før.

Der må derimod ikke ske nogen gensidig drejning af lastpladerne. En sådan drejning vil nemlig medføre negativ dissipation i Rankine-zonerne i den side, der sammentrykkes mindst.

Hvis materialerne overalt fulgte den associerede flydelov, ville den relative flytning langs lastpladerne være en fjernelse. Hvis der derimod er tale om glidning langs lastpladerne, sker denne fjernelse ikke, og hermed overholdes den associerede flydelov ikke. Dette har dog ingen indflydelse på bæreevnen. Dette indses således:

For at en mekanisme kan dannes, må sliplinjefeltet i prismet strækkes fra dets sider til midten. Dette er ikke muligt, uden at sliplinjefeltet udstrækkes til en del af prismets over- og underside. Da der ved bruddet nødvendigvis må ske bevægelser her, og da betonen her bevæges udad, må spændingerne her opfylde friktionsbetingelsen  $|\tau| = -\sigma \tan \varphi_p$ , og  $\tau$  må være rettet indad på betonen. Hermed er der givet tilstrækkeligt til, at spændingerne kan bestemmes overalt i prismet, og bæreevnen kan beregnes. Dette giver præcis de resultater, som allerede er fundet.

For at bruddet kan ske, er det altså nødvendigt, at belastningen har den tidligere fundne værdi. Da bæreevnen på den anden side ikke kan være større end det, plasticitetsteorien med den associerede flydelov giver, ses det altså, at bæreevnen er uafhængig af den relative bevægelsesretning ved glidning langs lastpladen.

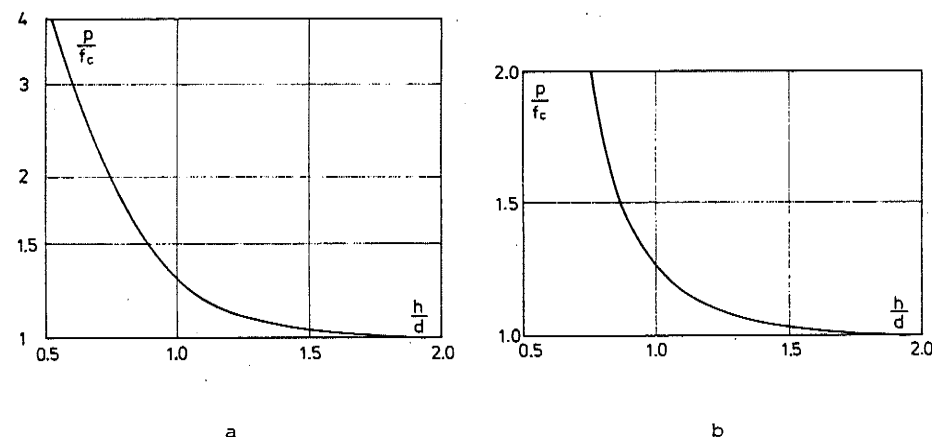
### 7.3 Rotationssymmetrisk tilstand

Prøvelegemet er nu en cylinder, hvis diameter kaldes  $d$ , og højde  $h$ . For  $h/d > \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$  og for  $\varphi_p = 0$  fås ligesom i afsnit 7.2 det simple resultat, at bæreevnen bliver  $P = \pi/4 d^2 f_c$  svarende til homogent enakset lodret tryk i hele cylinderen.

For lavere cylindre løses problemet analogt med løsningen i afsnit 7.2. Imidlertid kræves der for et cylindrisk prøvelegeme som nævnt i afsnit 5.9 en vis forhåndsviden om ringspændingen  $\sigma_\theta$ . Denne findes således: Ved deformationen vil et stift legeme ved hver trykplade translateres langs rotationsaksen, mens resten af materialet presses bort fra denne. Ringtøjningen  $\epsilon_\theta$  bliver da positiv overalt, hvor der er tøjninger. Dette medfører, at  $\sigma_1 = \sigma_\theta > \sigma_3$  i flydeområdet.

Med denne viden kan spændingerne bestemmes i samme rækkefølge som for det plane tilfælde. Imidlertid bliver kun den første Rankine-zone stadig en Rankine-zone, mens de rette linjer i Prandtl-zonen og i de efterfølgende Rankine-zoner ikke længere bliver rette.

Bæreevnen er angivet på figur 7.3.1. Mens en kurve før kunne bestemmes ved integration i kun et sliplinjefelt, kræves der nu et felt for hvert punkt på kurven.

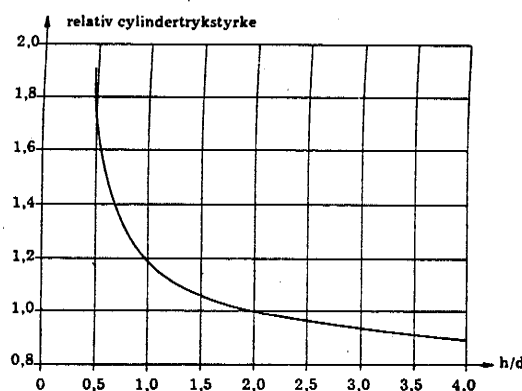


Figur 7.3.1 Bæreevne af cylinder af Coulomb-materiale med friktionsvinkel  $37^\circ$ . a. logaritmisk afbildning. b. lineær afbildning.

Også her kan der angives spændinger i de stive områder midt for trykpladerne, og også her kan flytningerne findes. Tøjningerne vil dog kun være nul i de stive legemer midt for trykpladerne og ikke i de yderste Rankine-zoner. Løsningen er altså igen en teoretisk korrekt løsning.

Deformationsmulighederne er større end i den tilsvarende plane model. Udover translationen i en retning, som danner en vinkel på op til  $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$  med lodret, kan laskepladerne nu også påføres en begrænset, gensidig drejning.

Fra [74.1] haves den på figur 7.3.2 viste, empirisk fundne kurve over den relative bæreevne af betoncylindre som funktion af  $h/d$ . I forhold til denne kurve giver figur 7.3.1 en undervurdering af bæreevnen for  $2 > h/d > \text{ca. } 1.1$  og en overvurdering uden for dette interval.



Figur 7.3.2 Cylinderstyrkens variation med højde/diameter-forholdet ifølge [74.1].

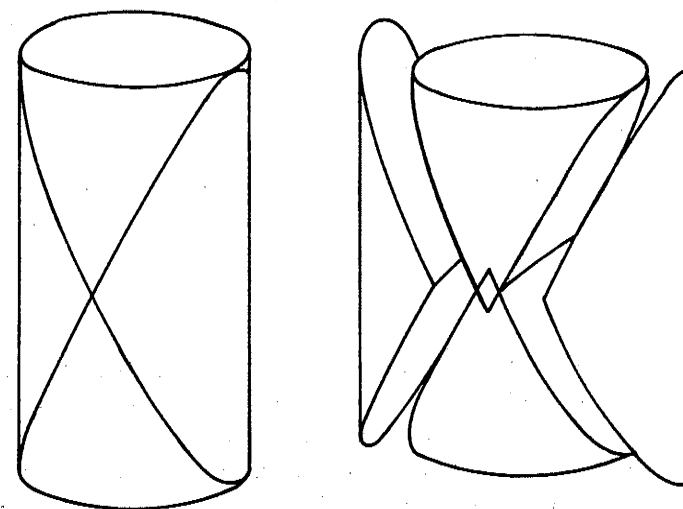
For  $h/d > 2$  angives en faldende kurve på figur 7.3.2, mens den plastiske løsning er konstant. Som årsager til denne uoverensstemmelse kan angives den statistiske effekt, at de forskellige brudmåder, se figur 7.2.1, vil medføre brud i "kædens svageste led", som vil være svagere end "middelstyrken", når der er flere led.

Endvidere ses altid en størrelseseffekt som forklares af Hillerborg [78.2] ved brudlinjernes endelige bredde og forholdet mellem denne

udstrækning og konstruktionens størrelse. Jo større konstruktion, jo dårligere mulighed for at udnytte brudlinjernes "plasticitet". Hillerborg arbejder ganske vist med trækforsøg, men dels kan de samme størrelseseffekter udmærket findes for tryk, og dels har vi her to positive og en negativ hovedtøjning, hvorved der ved bruddet sker en kraftig opspaltning af betonen.

Den laveste cylinder, hvis bæreevne netop er den enaksede trykstyrke gange tværsnitsarealet, har som nævnt højden  $h = d \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) = d\sqrt{k} = 2d$  for beton. For denne cylinder skal flytningerne findes. Det antages, at der ikke sker gensidige flytninger langs lastpladerne.

Først antages, at lastpladerne translaterer stykket  $u_0$  mod hinanden uden drejning. På figur 7.3.3 er vist en mekanisme, hvor alle bevægelserne sker i en plan. De to "bispehuer", dvs. legemerne ved lastpladerne, bevæges  $u_0$  mod hinanden, mens de to øvrige legemer bevæges  $u_0/\sqrt{k}$  fra hinanden.



7.3.3 Plan flydemekanisme i betoncylinder.

For at opnå et rotationssymmetrisk flytningsfelt erstattes  $u_0$  med  $du_0$ , og mekanismen antages at foregå for enhver plan gennem cylinderens akse. Hermed kan flytningerne integreres, og man får følgende værdier:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \begin{cases} \frac{\sqrt{k} u_0}{\pi} \sqrt{1 - \frac{z^2}{kr^2}}, & \frac{z^2}{kr^2} \leq 1 \\ 0, & \frac{z^2}{kr^2} \geq 1 \end{cases} \\ u_z &= \begin{cases} -\frac{u_0}{\pi} \operatorname{Arccsin} \frac{z}{|r|\sqrt{k}}, & \frac{z^2}{kr^2} \leq 1 \\ -\frac{u_0 z}{2|z|}, & \frac{z^2}{kr^2} \geq 1 \end{cases} \\ u_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} (7.3.1)$$

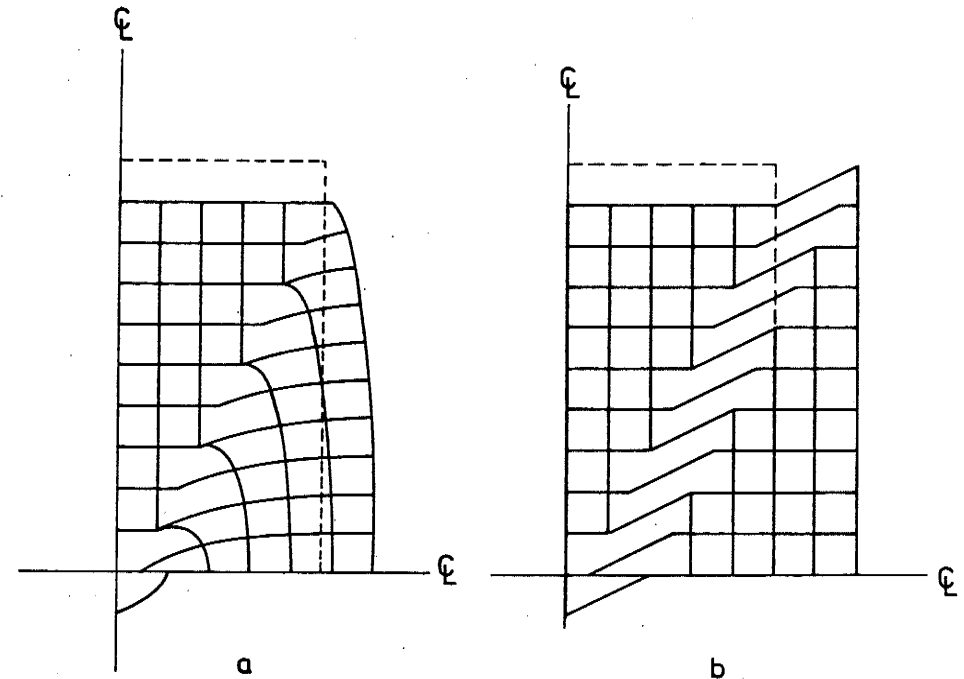
Flytningerne, der ses på figur 7.3.4a, er her beskrevet i et  $(r, \theta, z)$ -cylinderkoordinatsystem med begyndelsespunkt i cylinderens midtpunkt og  $z$ -akse i cylinderens akse. Når der ses bort fra cylinderens midtpunkt, hvor flytningen ikke er entydig, er flytningerne kontinuerte. Flytningerne er konstante langs enhver linje gennem begyndelsespunktet. Tøjningerne er nul i de to stive kegler, der strækker sig fra lastpladerne til cylinderens midtpunkt, og forskellige fra nul uden for disse kegler. For et punkt, som udefra nærmer sig til en af linjerne (keglen)  $z = \sqrt{k}r$ , går tøjningerne mod uendelig.

Den mindste tøjning i de deformerede områder fås for  $(r, z) = (\frac{1}{2}d, 0)$ , hvor  $d$  er cylinderens diameter. Her fås af (7.3.1):

$$\epsilon_z = -\frac{2 u_0}{\pi \sqrt{k}d}$$

I modsætning til situationen ved plan deformationstilstand fås der altså her egentlige tøjninger overalt uden for de stive legemer, der følger med hver lastplade. Dette giver mulighed for også en gensidig drejning af lastpladerne. Hvis nemlig de to stive dele drejes en vinkel  $\alpha$  i forhold til hinanden, vil tøjningen i de deformerede områder på hver side blive

$$u_{z, \alpha} = \pm \frac{\alpha}{2\sqrt{k}}$$



Figur 7.3.4 a. Rotationssymmetrisk deformeret betoncylinder med  $h/d = 2$ . b. Deformation som ved plan deformationstilstand.

Kravet om positiv dissipation overalt bliver her ensbetydende med

$$\max \{u_z + u_{z, \alpha}\} = -\frac{2 u_0}{\pi \sqrt{k}d} + \frac{\alpha}{2\sqrt{k}} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{u_0}{\alpha} > \frac{\pi d}{4}$$

Dette betyder, at den gensidige flytning kan beskrives ved en drejning om et punkt i cylinderens midterplan, som ligger mindst  $\frac{\pi}{4}d$  fra cylinderens midtpunkt.

Ligesom ved plan deformationstilstand kan der også ske en gensidig flytning af lastpladerne, som ikke går i cylinderaksens retning. Den største afvigelse herfra fås, når flytningen danner vinklen  $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$  med cylinderaksen. Deformationerne bliver da koncentreret i en flytningsdiskontinuitetsplan, som tangerer de stive kegler.

På figur 7.3.4a er skitseret et legeme deformeret efter (7.3.1), og på figur 7.3.4 b er skitseret de flytninger, man får ved at overføre flytningerne fra den plane deformationstilstand direkte.

I området uden for de to stive kegler fås for den sidstnævnte mekanisme, at tøjningerne i planen gennem rotationsaksen,  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_z$  og  $\gamma_{rz}$ , er nul, mens ringtøjningen  $\epsilon_\theta$  er positiv. En øvre-værdiberegning af bæreevnen på grundlag af disse flytninger giver et middeltryk på endefladerne på

$$p = f_c + k f_{td},$$

hvor  $f_{td}$  er trækstyrken ved enakset deformationstilstand,  $0 \leq f_t \leq f_{td} \leq \frac{1}{3} f_c$ . Da den rigtige løsning er  $p = f_c$ , fås altså en overvurdering af bæreevnen, som er proportional med trækstyrken, på grund af et forkert skøn af flytningerne.

Der er dog fare for endnu større fejl. Det ses nemlig, at flytningerne bort fra akse er ca. dobbelt så store i øvre-værdi-mekanismen på figur 7.3.4b, som de er i den korrekte løsning på figur 7.3.4a. Flytningerne er faktisk nøjagtig dobbelt så store som middelflytningen i den korrekte løsning. Det betyder, at virkningen af et ydre modhold imod radiære flytninger, f.eks. en ringarmering, vil blive overvurderet med en faktor 2.

Man skal derfor ved øvre-værdiberegninger være opmærksom på, ikke alene at man overvurderer bæreevnen, hvis de skønnede flytninger er forkerte, men at man specielt overvurderer indflydelsen af trækstyrken eller trækstyrkeerstattende armering, hvis træktøjningerne skønnes for store.

#### 7.4 Bæreevnen af en terning

Ved deformationen af et terningformet trykprøvelegeme er der hverken plan eller rotationssymmetrisk deformationstilstand. Den teoretiske bæreevne er større end trykstyrken gange sidearealet. Den kan ikke findes på simpel vis. Der kan dog angives både en nedre- og en øvre-værdi for bæreevnen ud fra resultaterne for det cylindriske prøvelegeme.

Først udledes en nedreværdi-løsning. Terningen kan inden i sig rumme en cylinder med samme højde og diameter. Denne kan, som det ses af figur 7.3.1, uden nogen udvendig støtte overføre en middelspænding på  $1.27 \times f_c$ . I områderne uden for cylinderen kan overføres en spænding på  $f_c$ . Af dette fås en middelspænding på terningens side på

$$p_{ter}^- = \left( \frac{\pi}{4} \times 1.27 + 1 - \frac{\pi}{4} \right) f_c = 1.21 f_c \quad (7.4.1)$$

En øvre-værdiberegning kan tage udgangspunkt i løsningen for  $h/d = 1/\sqrt{2}$ . En cylinder med denne højde indeholder hele terningen, og løsningen angiver da en flytning overalt i terningen. Af disse flytninger kan beregnes en øvre-værdi af bæreevnen. Denne bliver

$$p_{ter}^+ \approx 2.3 f_c \quad (7.4.2)$$

Af disse to værdier er nedreværdien givetvis den mest pålidelige. Den fejl, der gøres i nedreværdien, er, at området med spændinger over den enaksede trykstyrke ikke går langt nok ud imod terningens hjørner. I disse områder synes der dog ikke at være muligheder for store ændringer af spændingsfordelingerne, da det er svært at skaffe det nødvendige "sidetryk" her. Derfor ligger den virkelige værdi næppe langt over nedreværdien. Et skøn for denne er følgende interval

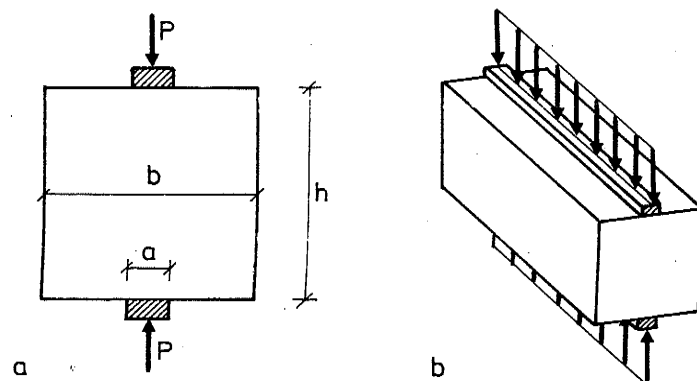
$$p_{ter} = 1.5 f_c \pm 15\% \quad (7.4.3)$$

Et erfaringstal for terningstyrken er ca. 1.25 gange cylinderstyrken. Denne lidt lavere værdi kan være resultatet af, at tøjningerne i terningen varierer endnu mere, end de gør i cylinderen, og at det derfor er sværere at opnå den teoretiske styrke, jvf. kapitel 15. Afvigelsen kan også skyldes, at betonen muligvis ikke opfylder normalitetsbetingelsen, jvf. kapitel 16.



## 8. Spaltning

### 8.1 Indledning



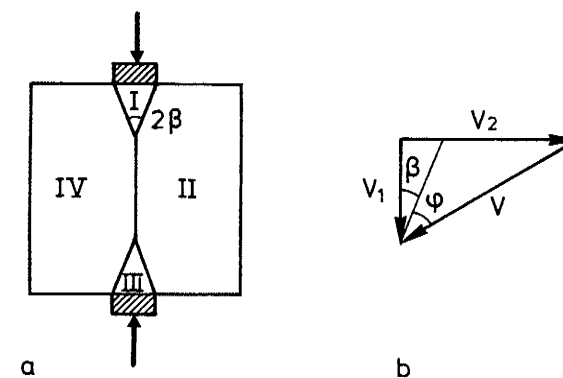
Figur 8.1.1 Prisme belastet til spaltning

Der betragtes et uarmeret, vægtløst betonprisme med højden  $h$  og bredden  $b$  belastet langs to sider over for hinanden med to kræfter  $P$  rettet mod hinanden, se figur 8.1.1. Belastningen påføres gennem stive lastplader med bredden  $a$ . Prismets og belastningspladernes udstrækning vinkelret på planen er så stor i forhold til  $h$ , at der kan antages plan deformationstilstand i prismet. Da ret store dele af prismet, som vi skal se, ikke får plastiske tøjninger ved bruddet, er den hertil nødvendige længde ikke særlig stor.  $P$  regnes pr. længdeenhed vinkelret på figurens plan.

Om prismets bredde  $b$  antages blot, at den er så stor, at den ikke har nogen indflydelse på bæreevnen. Den hertil nødvendige bredde vil blive undersøgt senere i dette kapitel. Hvis bredden er mindre, kan den aktuelle mekanisme være en, hvor brudzonerne fra en lastplade ikke går igennem til den anden lastplade, men ender ved en af prismets sider, dvs. at det bliver en "hjørneafbrækningsmekanisme". Disse undersøges nærmere i kapitel 9.

### 8.2 Øvre værdiløsning

En øvre værdiløsning på problemet blev givet af Chen & Drucker i [69.1]. Den udledes af den dobbeltsymmetriske mekanisme på figur 8.2.1a. Prismet deles af de viste



Figur 8.2.1 Spaltning. Øvre værdimekanisme

fem rette flydelinjer i fire stive legemer, hvis bevægelser kan beskrives ved, at II og IV translaterer  $V_2$  bort fra hinanden, og I og III  $V_1$  mod hinanden. Den relative bevægelse  $V$  af I i forhold til II er en translation nedad og bort i en retning, som danner vinklen  $\varphi$  med flydelinjen. Heraf fås jvf. figur 8.2.1b

$$V_1 = V \cos (\beta + \varphi); \quad V_2 = V \sin (\beta + \varphi)$$

Dissipationen bliver

$$D = f_t (h - a \cot \beta) \cdot 2V \sin (\beta + \varphi) \\ + \frac{1 - \sin \varphi}{2} f_c \frac{2a}{\sin \beta} \cdot V$$

Det ydre arbejde bliver

$$A_y = P \cdot 2V \cos (\beta + \varphi)$$

Øvre værdisætningen giver nu

$$D = A_y \Rightarrow$$

$$P = \frac{a}{\sin\beta \cos(\beta+\varphi)} \left( \frac{1-\sin\varphi}{2} f_c + \sin(\beta+\varphi) \left( \frac{h}{a} \sin\beta - \cos\beta \right) f_t \right) \quad (8.2.1)$$

Da det er en øvre værdiløsning, skal udtrykket minimeres med hensyn til  $\beta$ . Hvis trækstyrken er nul, fås den eksakte løsning for  $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$

$$P = a f_c$$

I andre tilfælde kan  $\beta$  findes af

$$\cot\beta = \tan\varphi + \frac{1}{\cos\varphi} \sqrt{1 + \frac{\frac{h}{a} \cos\varphi}{\frac{f_c}{f_t} \frac{1-\sin\varphi}{2} - \sin\varphi}} \quad (8.2.2)$$

Hvis den heraf fundne værdi af  $\beta$  opfylder  $\cot\beta \leq \frac{h}{a}$ , kan bæreevnen skrives

$$P = a f_t \left( \frac{h}{a} \tan(2\beta+\varphi) - 1 \right) \quad (8.2.3)$$

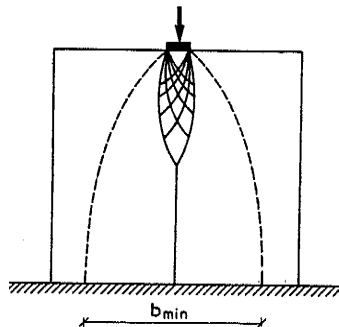
Ellers må  $\beta$  findes af

$$\cot\beta = \frac{h}{a}$$

og bæreevnen findes af (8.2.1).

### 8.3 Korrekt løsning

Den eksakte løsning blev givet af Izbicki i [72.1], se figur 8.3.1.

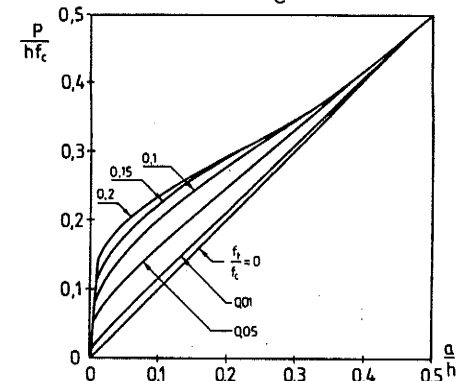


Figur 8.3.1 Spaltning. Korrekt mekanisme. Kun halvdelen af prismet er vist.

Den indeholder en sliplinjezone under hver lastplade. Normal-spændingen på prismets lodrette symmetrilinje er negativ lige under lastpladen. Herfra stiger den, til den når trækstyrken. Fra det punkt, hvor dette sker, udgår én trækflydelinje til det tilsvarende punkt i zonen ved den anden lastplade.

Bæreevnen, som fås af denne løsning, er vist på figur 8.3.2. For meget små værdier af  $a/h$  vil der kunne ske et lokalt brud under en af lastpladerne uden spaltning af prismet. Den belastning, hvorved dette sker, er "fundamentsbæreevnen" givet af Prandtl

$$\frac{P}{a} = \frac{f_c}{k-1} (k e^{\pi \tan\varphi} - 1) = 13.7 f_c \quad (8.3.1)$$



Figur 8.3.2 Bæreevne ved spaltning

Denne løsning giver den rette linje gennem origo på figur 8.3.2

Indtil nu er løsningen en ufuldstændig løsning af den type, som er meget almindelig inden for geoteknikken: Spændingerne er givet i de områder, hvor der ved flydningen forekommer tøjninger forskellige fra nul. De resterende områder er hver for sig i ligevægt. Der kan findes flytninger og tøjninger, som svarer til de fundne spændinger. Imidlertid er spændingerne ikke fundet uden for flydeområderne, og det vides derfor kun, at løsningen er en øvre værdiløsning.

Izbicki har selv angivet spændinger i områderne uden for flyde-zonerne ved at benytte det samme princip, som Bishop [53.1] brugte til at vise, at Prandtl's fundamentsløsning ikke kun er en øvre værdiløsning, men er en teoretisk eksakt løsning. Princippet

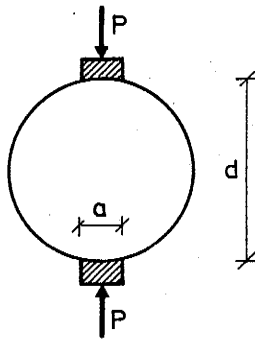
er, at spændingerne i ethvert punkt enten antages i flydning eller nul. Hvor dette princip benyttes, angiver det samtidig den mindste størrelse af de omkringliggende dele, som gør løsningen eksakt, idet delene med spændingen nul kan fjernes, uden at løsningen ændres.

På figur 8.3.1 er punkteret vist det nødvendige område. Prismets nødvendige bredde  $b_{\min}$  er lig med  $a$  for  $f_t = 0$ , og den vokser med  $f_t$ . Den vil formodentlig aldrig blive større end  $h$ .

En sammenligning mellem Izickis løsning og øvre værdiløsningen viser, at øvre værdien i nogle få tilfælde kan give op til 40% for store værdier, men overvurderingen er højst 6%, når  $a/h > 0.05$  og  $f_t < 0.1 f_c$ .

#### 8.4 Spalteforsøg på betoncylindre

Betons trækstyrke undersøges ofte indirekte gennem et spalteforsøg, hvor



Figur 8.4.1 Spalteforsøg med betoncylinder

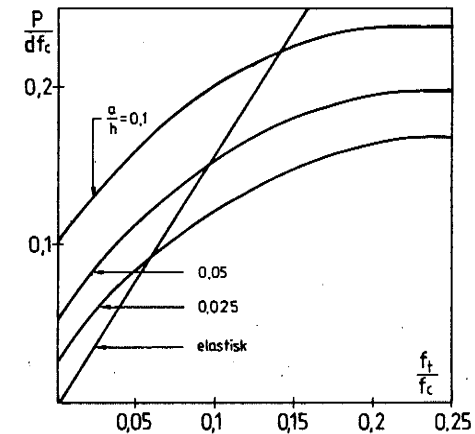
en cylinder belastes langs to diametralt modsatte frembringere, se figur 8.4.1. Hvis lastpladebredden  $a$  er mindre end en tiendedel af diameteren  $d$ , vil normalspændingen i symmetrisnittet gennem belastningerne med højst 1% fejl ifølge den lineære elasticitetsteori være et jævnt fordelt træk af størrelsen

$$\sigma_x = \frac{2}{\pi} \frac{P}{d} \quad (8.4.1)$$

suppleret med en koncentreret overførsel af tryk ved lastpladerne, se [75.2].

Hvis betonen er lineær elastisk helt til brud (i træk), kan bæreevnen af spalteforsøget ikke være større end det, man får ved at sætte  $\sigma_x = f_t$ . Den kan derimod godt være mindre, hvis der sker tryk/forskydningsbrud lige under lejepladerne.

Bæreevnen er således ifølge elasticitetsteorien mindre end eller lig med det, den rette linje på figur 8.4.2 angiver.



Figur 8.4.2 Spalteforsøgets styrke afhængigt af trækstyrken

De øvrige kurver på figuren er den plastiske bæreevne beregnet fra figur 8.3.2. Det ses af disse, at lastpladebredden har stor indflydelse på den plastiske løsning, mens den som nævnt næsten ingen indflydelse har på den elastiske løsning.

Da den plastiske løsning for en given flydeflade giver den absolut højeste opnåelige bæreevne uafhængigt af elastiske egenskaber, flydelove m.m., gælder de dele af den elastiske linje på figur 8.6, der ligger over den tilsvarende plastiske kurve, ikke. Der vil da ske trykbrud for en mindre belastning.

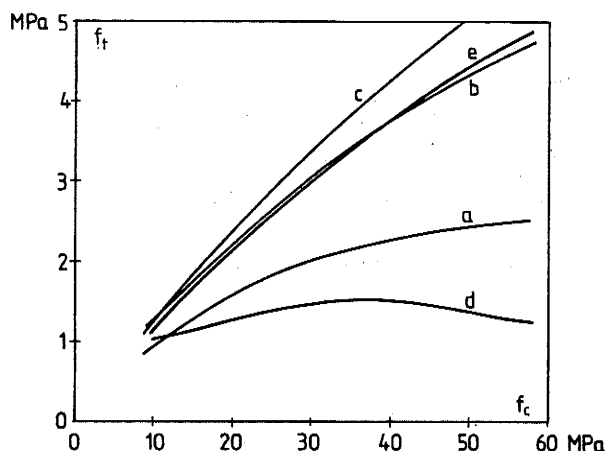
Gravesen og Krenchel har lavet en serie forsøg refereret i [72.2]. De har lavet trykstyrkebestemmelser med betoncylindre med diameter 150 mm og højde 300 mm, trækstyrkebestemmelser med cylindre med diameter 140 mm og højde 700 mm med indstøbte armeringsjern et stykke ind fra hver ende, og spalteforsøg med de samme cylindre som trykforsøgene. Ved spalteforsøgene belastedes cylindrene gennem mellemlæg af hård fiberplade, 15 mm bred, tildannet efter cylindrenes krumning.

Af disse forsøg er bl.a. fundet kurverne (a) og (b) på figur 8.4.3, som angiver henholdsvis den enaksede trækstyrke og spaltetrækstyrken som funktion af trykstyrken. Ved spaltetrækstyrken skal her forstås den værdi, formel (8.4.1) angiver.

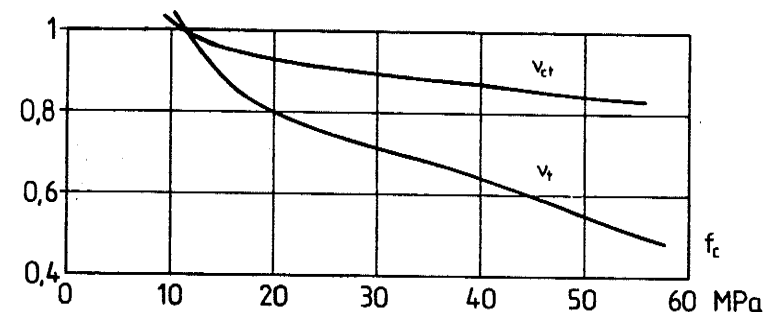
De to kurver kan sammenlignes ved hjælp af kurverne på figur 8.4.3. Af kurve (a) bestemmes den spaltetrækstyrke, en ideelt plastisk beton skulle have, kurve (c), og af kurve (b) bestemmes den enaksede trækstyrke, kurve (d), betonen skulle have for at give spaltetrækstyrken på kurve (b).

Forholdet mellem ordinaterne på kurve (b) og (c) er den faktor  $v_{ct}$ , hvormed man skulle reducere betonens trykstyrke og enaksede trækstyrke for at få kurve (b). Forholdet mellem ordinaterne på kurve (d) og (a) er den faktor  $v_t$ , hvormed man skulle reducere betonens enaksede trækstyrke for at få kurve (b).  $v_t$  og  $v_{ct}$  er vist på figur 8.4.4.

I den plastiske løsning forudsættes en jævn spænding under lastpladerne. Hvis de anvendte træfiberplader ikke er i stand til at overføre det konstante tryk over hele fladen, men får et større tryk ved midten end ved kanterne, bliver bæreevnen mindre. Hvis der tages hensyn hertil ved formelt



Figur 8.4.3 Trækstyrkens og spaltetrækstyrkens afhængighed af trykstyrken



Figur 8.4.4 Spalteforsøgets effektivitet

at reducere lastpladebredden med en faktor 0.8, føres kurve (c) over i kurve (e), som ligger meget tæt på (b). Med denne modificerede bredde kan forskellen mellem spaltetrækstyrken og den enaksede trækstyrke altså forklares ved, at betonen antages ideelt plastisk, også i træk.

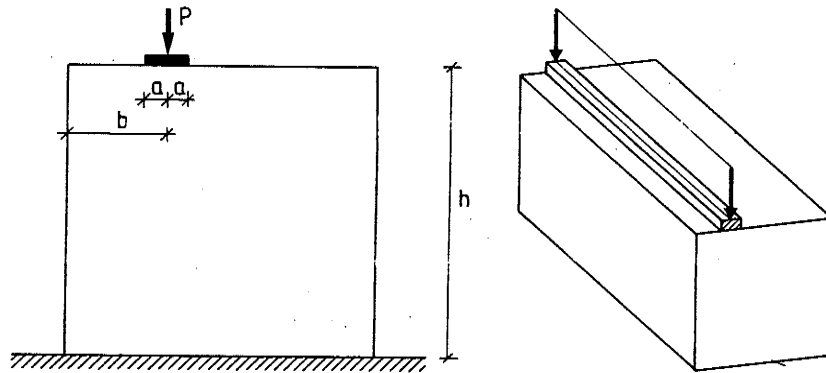
Selv om betonen ikke er ideelt plastisk i tryk og i endnu mindre grad i træk, ses det altså, at en plastisk tolkning af spalteforsøget giver en bedre overensstemmelse mellem de forskellige trækstyrkemålinger, end man kan opnå med en lineær elastisk tolkning. Uoverensstemmelsen er faktisk så lille, så en moderat ændring af den regningsmæssige lastpladebredde fjerner den.

Afhængigheden af lastpladebredde og af forholdet mellem træk- og trykstyrke er behandlet af Nielsen og Jensen i [75.2].

Da bæreevnen ved spalteforsøget afhænger af lastpladebredden, kommer spaltetrækstyrken ifølge (8.4.1) også til at afhænge heraf, hvilket er en uheldig egenskab ved forsøget. Bæreevnen afhænger nemlig så også af stivheden af lastpladerne, eksempelvis om de er af stål eller træfiber, og hvordan deres kontakt med betonen er.

## 9. Koncentrerede kræfter på betonprismer

### 9.1 Indledning



Figur 9.1.1 Koncentreret kraft på betonblok

En rektangulær betonblok med højden  $h$  hviler på et glat, vandret underlag, se figur 9.1.1. Den er belastet lodret langs en strimmel af bredden  $2a$  gennem en stålplade. Afstanden fra midten af lastpladen til den nærmeste kant kaldes  $b$ . Belastningen pr. længdeenhed vinkelret på planen i figur 9.1.1.a kaldes  $P$ . Idet blokkens egenvægt negligeres, ønskes bæreevnen bestemt. Ligesom i spalttningsproblemet kapitel 8 antages plan deformationstilstand.

Hvis  $b$  er tilstrækkelig stor, vil hele blokken spaltes ned til underlaget, og bæreevnen findes som i kapitel 8, idet underlaget svarer til den vandrette symmetrilinje på figur 8.1.1.a. Det, der har interesse her, er de tilfælde, hvor flydezonerne strækker sig fra lastpladen og til siden af blokken, og bæreevnen bliver afhængig af  $b$ . Ligesom i kapitel 8 udgør fundamentsløsningen

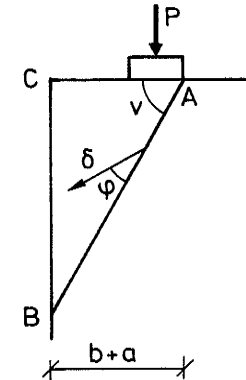
$$\frac{P}{2a} = \frac{f_c}{k-1} (k e^{\pi \tan \varphi} - 1) = 13.7 f_c \text{ for } k = 4, \varphi = 36.9^\circ \quad (9.1.1)$$

en øvre grænse for bæreevnen.

I det næste kapitel vil der blive fundet nogle øvreværdiløsninger. Den korrekte løsning bliver vist i kapitel 9.3. De bedste øvreværdiløsninger sammenlignes i kapitel 9.4 med nogle forsøgsresultater.

### 9.2 Øvreværdiløsninger

Den simpleste øvreværdiløsning er en, hvor der dannes en ret flydelinje fra kanten af lastpladen til siden af blokken, se figur 9.2.1. Det trekantede legeme



Figur 9.2.1 Mekanisme med én ret linje

ABC translaterer  $\delta$  i en retning, som danner vinklen  $\varphi$  med flydelinjen AB. Mekanismen har én frihedsgrad, vinklen  $v$ . Dissipationen bliver

$$D = f_c \frac{1 - \sin \varphi}{2} \delta \frac{b+a}{\cos v}$$

Det ydre arbejde bliver

$$A_y = P \delta \sin(v - \varphi)$$

Øvreværdisætningen giver

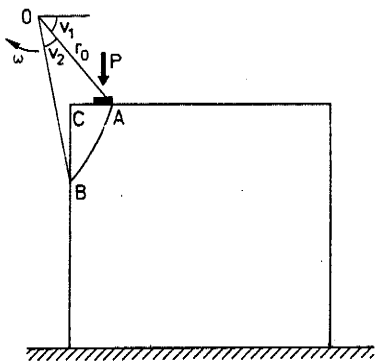
$$D = A_y \Rightarrow P = \frac{f_c (b+a) (1 - \sin \varphi)}{2 \cos v \sin(v - \varphi)}$$

Dette udtryk minimeres med hensyn til  $v$  for  $v = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ :

$$P = f_c (b+a) \quad (9.2.1)$$

Løsningen svarer til det enaksede tryk  $f_c$  over hele stykket AC.

Da lasten på AC virker nærmest A, vil vi kunne få et større ydre arbejde og dermed en lavere øvreværdi ved at indføre en drejning med uret af ABC, hvorved flytningen bliver større ved A end ved C.



Figur 9.2.2 Mekanisme med logaritmisk spiral

En sådan mekanisme ses på figur 9.2.2. Legemet ABC roterer vinklen  $\omega$  om 0. AB er her en del af en logaritmisk spiral med pol i 0 og stigningsvinkel  $\varphi$ . Mekanismen har to frihedsgrader repræsenteret af vinklerne  $v_1$  og  $v_2$ . Øvreværdisætningen giver

$$A_y = P(r_0 \cos v_1 - a) \omega$$

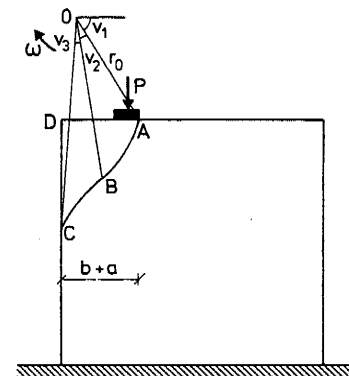
$$D = \frac{f_c}{k-1} \cdot \frac{r_0^2}{2} (e^{2v_2 \tan \varphi} - 1) \omega$$

Afstanden  $r_0 = |OA|$  findes og elimineres:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{a+b}{\cos v_1 - e^{v_2 \tan \varphi} \cos(v_1 + v_2)} \\ D &= A_y \Rightarrow \\ P &= \frac{f_c(a+b)}{2(k-1) \cos^2 v_1} \\ &\quad \cdot \frac{e^{2v_2 \tan \varphi} - 1}{\left(1 - \frac{\cos(v_1 + v_2)}{\cos v_1} e^{v_2 \tan \varphi}\right) \left(1 - \frac{a}{a+b} \left(1 - \frac{\cos(v_1 + v_2)}{\cos v_1} e^{v_2 \tan \varphi}\right)\right)} \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

Dette udtryk skal minimeres med hensyn til  $v_1$  og  $v_2$ . Den heraf fundne bæreevne fremgår som den øverste krumme kurve på figur 9.2.4.

De hidtil betragtede mekanismer har givet bæreevner, som var uafhængige af trækstyrken. For et modificeret Coulomb materiale i plan deformationstilstand består den optimale flydelinje mellem to stive legemer af en spiralbue og/eller en hyperbelbue, jævnfør kapitel 6.4.4. En mekanisme med disse kurver er vist på figur 9.2.3. Her er AB en del af en logaritmisk spiral med pol i 0 og stigningsvinkel  $\varphi$ , og BC er en del af en retvinklet hyperbel, hvis asymptoter skærer hinanden i 0.



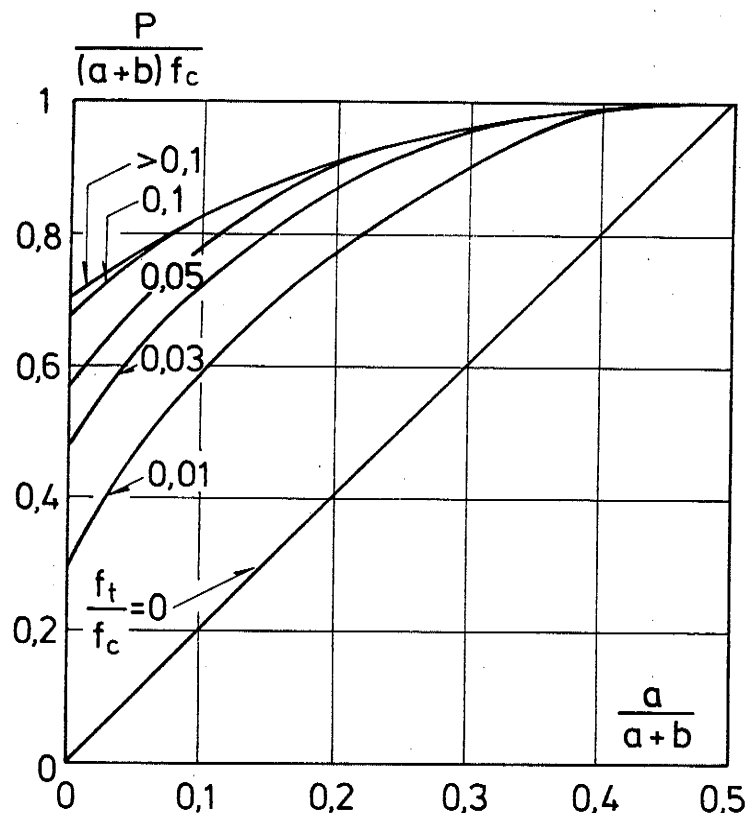
Figur 9.2.3 Mekanisme med spiral og hyperbel

De to kurver har fælles tangent i B. Mekanismen har tre frihedsgrader, der kan vælges som vinklerne  $v_1$ ,  $v_2$  og  $v_3$ . Afstanden  $|OA| = r_0$  er

$$r_0 = \frac{a+b}{\cos v_1 - \cos(v_1 + v_2 + v_3) \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi + 2v_3)}} e^{v_2 \tan \varphi}} \quad (9.2.3)$$

Det ydre arbejde og dissipationen er

$$A_y = P(r_o \cos v_1 - a)\omega \quad (9.2.4)$$

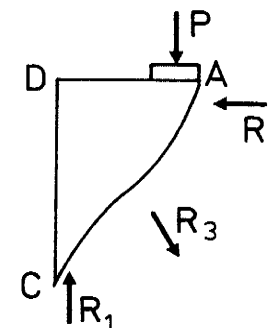


Figur 9.2.4 Bæreevne fra mekanismerne på figur 9.2.2 og 9.2.3

$$D = \frac{f_c r_o^2}{2(k-1)} (e^{2v_2 \tan \varphi} - 1) + \frac{\omega}{2} r_o^2 e^{2v_2 \tan \varphi} ((k f_t - f_c) \frac{\cos(\varphi + 2v_3) \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})}{\cos \varphi \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - v_3)} + f_c) \cdot (\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) - \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi + 2v_3)} \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - v_3)) \quad (9.2.5)$$

Den bæreevne, der findes heraf, minimeres (numerisk) med hensyn til  $v_1$ ,  $v_2$  og  $v_3$ . Resultatet bliver kurverne på figur 9.2.4. Disse udgør således den bedste øvre værdiløsning med kun to stive legemer. Det bemærkes, at for  $a = b$  og for  $f_t = 0$  fås  $P = 2af_c$ , hvilket er den teoretisk korrekte bæreevne i disse tilfælde.

Øvre værdien kan dog forbedres yderligere. Betragtes nemlig

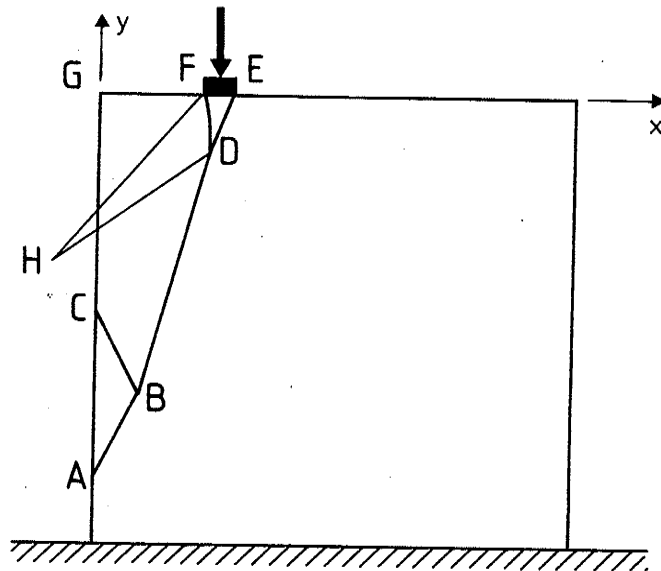


Figur 9.2.5 Ligevægt af afbrækket hjørne

ligevægten af ABCD fra figur 9.2.3, se figur 9.2.5, ses det, at da bæreevnen afhænger af afstanden  $b$  til kanten af prismet, må der være en trykkraft  $R_1$  nær C. Der må også, for at brudbetingelsen kan være opfyldt ved A, og fordi kraften spredes ud under lastpladen, være en vandret trykkraft  $R_2$  ved A. For at hele legemet kan være i ligevægt, må der så være et træk mellem  $R_1$  og  $R_2$ . Dette er repræsenteret af  $R_3$ .

Mekanismen på figur 9.2.6 opfylder disse kvalitative krav. Her er BCGFD et stift legeme, som roterer  $\omega$  om B mod uret. BD er således en trækflydelinje. I ABC antages en homogen tøjnings-tilstand svarende til enakset lodret tryk; der gælder  $\angle BCA = \angle BAC = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ . EDF translaterer nedad i en retning, som danner vinklen  $\varphi$  med ED. Den relative bevægelse af EDF i forhold til BCGFD er en rotation om H, hvor vinklen mellem HB og ED er  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . DF er derfor en del af en logaritmisk spiral med pol i H og stigningsvinkel  $\varphi$ . Denne mekanisme har fire frihedsgrader, idet den er fastlagt ved f.eks. størrelserne  $\angle GFH$ ,  $|HF|$ ,  $\angle FHD$  og  $|HB|$ .

Beregningerne kan foretages således, idet punkterne beskrives i det på figuren viste koordinatsystem:



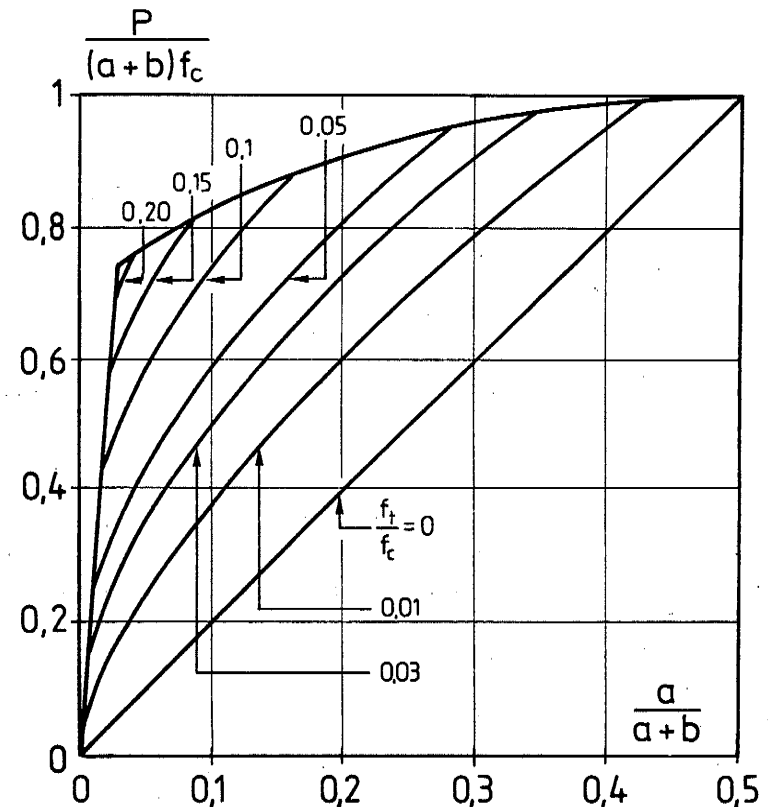
Figur 9.2.6 Mekanisme med trækflydelinje

$$\begin{aligned}
 |HD| &= |HF| e^{-\angle FHD \tan \varphi} \\
 x_H &= b - 2a - |HF| \cos \angle GFH \\
 y_H &= -|HF| \sin \angle GFH \\
 x_D &= x_H + |HD| \cos (\angle GFH - \angle FHD) \\
 y_D &= y_H + |HD| \sin (\angle GFH - \angle FHD) \\
 x_B &= x_H + |HB| \sin (\angle GED - \varphi) \\
 y_B &= y_H - |HB| \cos (\angle GED - \varphi)
 \end{aligned}
 \quad (9.2.6)$$

$$D = \frac{1}{2} f_c \omega (x_B^2 + \frac{|HF|^2 - |HD|^2}{k-1} + 2 \frac{|HB| \cdot |DE|}{k+1}) + \frac{1}{2} f_t \omega |BD|^2$$

$$A_y = P \omega |HB| \sin (\angle GED - \varphi)$$

Ved at sætte  $D = A_y$  fås  $P$ , som minimeres med hensyn til de frie parametre. Det viser sig, at denne mekanisme er bedre end den på figur 9.2.3 i alle de tilfælde, hvor  $v_3 > 0$ , så den laveste øvre værdi til nu er minimum af følgende tre værdier: "fundamentsløsningen" (9.1.1), mekanismen på figur 9.2.2 og mekanismen på figur 9.2.6. Den således fundne bæreevne er vist på figur 9.2.7.



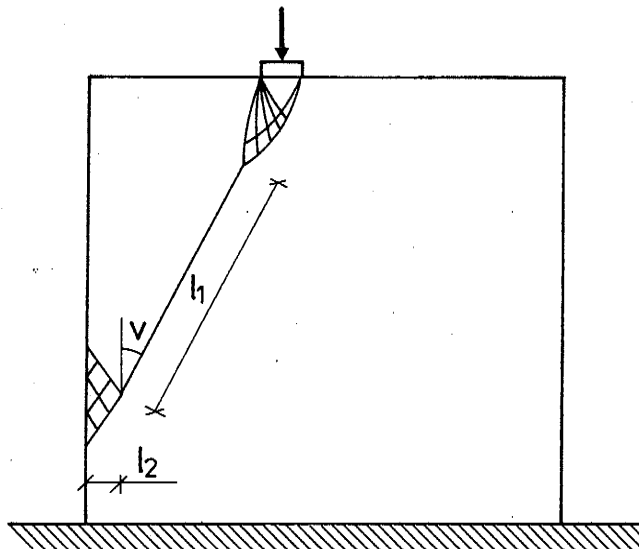
Figur 9.2.7 Bæreevne ifølge mekanismerne figur 9.2.2 og figur 9.2.6, samt (9.1.1).



### 9.3 Den korrekte løsning

Hvordan er egentlig den korrekte løsning?

En ufuldstændig løsning af den i kapitel 8 omtalte type kan findes med inspiration fra figur 9.2.6. Den er vist på figur 9.3.1. Forskellen mellem figur 9.2.6 og 9.3.1 er den samme.



Figur 9.3.1 Ufuldstændig, sandsynligvis eksakt løsning

som forskellen mellem figur 8.2.1 og 8.3.1. I stedet for legemet EDF på figur 9.2.6 fås nu en Rankinezone lige under lastpladen. Ved siden af denne er der to Prandtlzoner med forskellige centervinkler. I det punkt, hvor de to yderste sliplinjer herfra mødes, er den største hovedspænding netop lig med trækstyrken. Herfra udgår en ret trækflydelinje i retning af den ene hovedspænding. Trækflydelinjen ender i det ene hjørne af en trekantformet Rankinezone med lodrette og vandrette hovedspændingsretninger.

Løsningen er naturligvis en øvregrænseløsning, da der kan angives en mekanisme, hvis tøjninger overalt svarer til spændingerne i løsningen. Mekanismen består af en rotation mod uret af det stive legeme til venstre for brudzonerne om det punkt, hvor den nederste Rankinezone møder trækflydelinjen, samt de deraf afledte flytninger

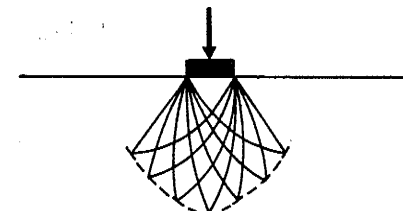
i sliplinjezonerne. Den lille Rankinezone under lastpladen vil herved få en homogen tøjning, som giver en forlængelse af vandrette fibre lige under lastpladen. Løsningen svarer altså kun eksakt til en glat lastplade.

Spændingerne i de områder, der er i flydning, er naturligvis i ligevægt. Kun det punkt, hvor trækflydelinjen møder den nederste Rankinezone, fortjener nærmere behandling. Her er spændingstilstanden nemlig ikke entydig. Hvis imidlertid vinklen mellem de to hovedretninger i punktet er så stor, så en Prandtlzone med denne eller en mindre topvinkel kan have de to spændingstilstande langs sine yderradier, er det muligt at angive spændinger, som er i ligevægt og ikke overskrider flydebetingelsen også i en omegn af dette punkt. Hvis vinklen er mindre end dette, er det ikke muligt.

Vinklen mellem hovedretningerne er den spidse vinkel  $v$  mellem en lodret retning og trækflydelinjen. En nødvendig betingelse er altså, at  $v \geq v_s$ , hvor  $v_s$  er givet (6.4.5.1), dvs.

$$v \geq -\frac{\sqrt{k}}{k-1} \ln(1-(k-1)\frac{f_t}{f_c}) \quad (9.3.1)$$

Det stive legeme til venstre for brudzonerne skal også være i ligevægt. At dette netop kan opnås, indses således: For en given spænding under lejepladen og en given trækstyrke beregnes sliplinjefeltet under lastpladen, se figur 9.3.2. Langs en bestemt kurve i dette felt er første hovedspænding lig med



Figur 9.3.2 Mulige spændinger under lastpladen

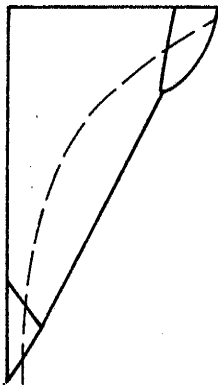
trækstyrken. Feltet er altså ikke gyldigt uden for denne kurve. Kurven udgør de mulige udgangspunkter for trækflydelinjen. Der

er således én fri parameter i valget af denne linje, f.eks. den tidligere nævnte vinkel  $v$ . Mekanismen beskrives i øvrigt ved de to længder  $l_1$  og  $l_2$ , som er angivet på figur 9.3.1. Når disse tre størrelser er valgt, kan alle påvirkninger på det stive legeme findes. Da dette skal være i ligevægt, skal disse opfylde tre ligevægtsligninger, hvilket netop er nok til at bestemme  $v$ ,  $l_1$  og  $l_2$ .

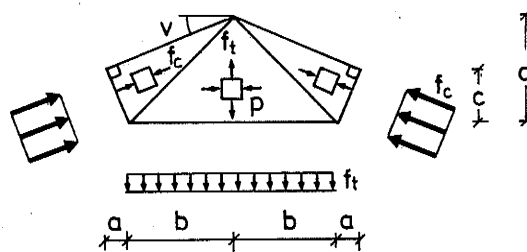
Herefter kan afstanden fra kanten af prismet til lastpladen bestemmes, hvorefter der for den givne trækstyrke er fundet et punkt på den Kurve, der angiver bæreevnen som funktion af afstanden fra prismets kant. Hvis dette gentages for forskellige spændinger under lastpladen, kan hele kurven fastlægges.

For at vise, at løsningen er eksakt, skal man vise, at der kan angives spændinger overalt i prismet, som er i ligevægt og ikke overskrider flydebetingelsen. I det store "massiv" til højre for brudzonerne er dette naturligvis muligt.

På venstre side af brudzonerne skal en trykbue spænde over trækflydelinjen og holde ligevægt med trækket i denne, se figur 9.3.3.



Figur 9.3.3 Kraftforløb i stift legeme



Figur 9.3.4 Spændinger i modificeret legeme

Et problem, der minder meget om dette er vist på figur 9.3.4. Et femkantet legeme er belastet med sin trykstyrke på enderne og trækstyrken langs den ene side. Det er naturligvis givet, at legemet er i ligevægt; dertil kræves, at

$$af_c = bf_t \quad (9.3.2)$$

Hvad er betingelsen for, at legemet kan bære denne belastning?

En løsning på spørgsmålet kan fås ved opdeling af legemet i de viste tre trekantformede områder og antagelse af en homogen spændingstilstand i hvert område. I de to øverste områder antages enakset tryk  $f_c$  parallelt med oversiderne. I det midterste område er den ene hovedspænding  $f_t$ , mens den anden hovedspænding  $p$  findes ved en vandret projektligning for den ene halvdel af legemet:

$$d \cdot p = c \cdot f_c \quad (9.3.3)$$

Af geometrien findes

$$\left. \begin{aligned} a &= c \tan v \\ d &= c + (a+b) \tan v \end{aligned} \right\} \quad (9.3.4)$$

Af (9.3.2) - (9.3.4) findes  $p$

$$p = \frac{f_c}{1 + \left(1 + \frac{f_c}{f_t}\right) \tan^2 v} \quad (9.3.5)$$

For at hovedspændingstilstanden  $(\sigma_1, \sigma_2) = (f_t, -p)$  kan være statisk tilladelig, kræves jvf. figur 3.5

$$p \leq f_c - kf_t$$

Med indsættelse af (9.3.5) fås en tilstrækkelig betingelse på  $v$ :

$$v \geq \arctan \sqrt{\frac{k \left(\frac{f_t}{f_c}\right)^2}{\left(1 - k \frac{f_t}{f_c}\right) \left(1 + \frac{f_t}{f_c}\right)}} \quad (9.3.6)$$

som skal være opfyldt, for at legemet kan bære belastningen.

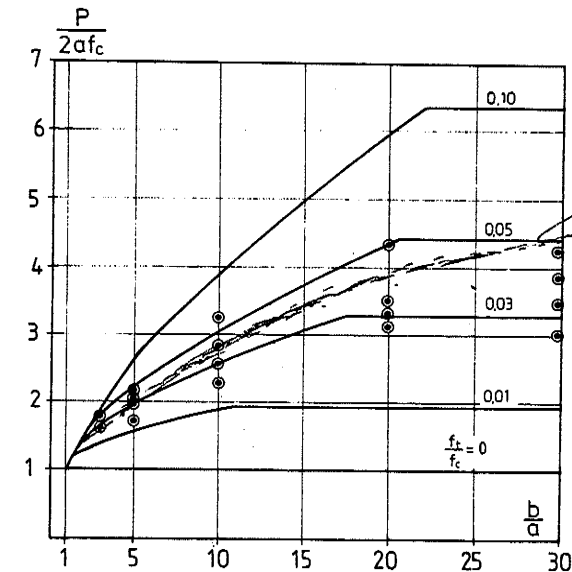
Når (9.3.6) er opfyldt, ses det ved sammenligning af figurerne 9.3.3 og 9.3.4, at der kun mangler eftervisning af, at der kan foretages en vis omfordeling af spændingerne i den øverste ende af legemet. Da denne omfordeling imidlertid skal foretages i et område, hvor der er ekstra materiale, som regningsmæssigt slet ikke er udnyttet endnu, skønnes det, at den kan foretages, omend det ikke er let at vise analytisk.

Hvis (9.3.6) ikke er opfyldt, er bæreevnen for det på figur 9.3.4 viste legeme overskredet. Der kan imidlertid ikke umiddelbart dannes en mekanisme på figur 9.3.3 svarende til den lavere bæreevne af legemet. Det kan derfor ikke sluttet heraf, at løsningen kun er en øvregrænse. Hvis derimod også betingelsen (9.3.1) er overskredet, er løsningen kun en øvregrænse, da det nu ikke længere er muligt at angive en sikker spændingsfordeling overalt i legemet.

#### 9.4 Forsøgsresultater

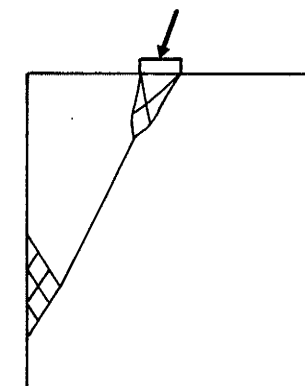
For en given blok og et givet angrebepunkt findes bæreevnen som den mindste af værdierne på figur 8.3.2 og figur 9.2.7. For en blok med  $a/h = 1/60$  er bæreevnen som funktion af trækstyrken og afstanden til kanten angivet på figur 9.4.1. På figuren er også vist resultaterne af nogle forsøg refereret i [73.2] udført med terninger med en sidelængde på 30 cm. De blev belastet gennem en 1 cm bred stålplade placeret i varierende afstand fra kanten. Det ses, at hvis den plastiske trækstyrke er ca. 3,5% af trykstyrken, passer resultaterne udmærket med teorien.

Forsøgene blev lavet på retninger med en trykstyrke på mellem 13 og 37 MPa. Ifølge kurve a på figur 8.4.3 skulle trækstyrken af betonen være mellem 6 og 8% af trykstyrken i dette interval. For at forsøgene skal passe med teorien, skal man altså indsatte ca. halvdelen af trækstyrken som den plastiske trækstyrke.



Figur 9.4.1 Bæreevne af blok belastet med  $a/h = 1/60$

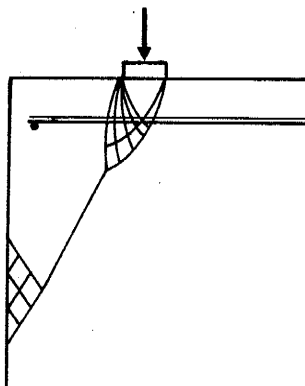
#### 9.5 Skrå belastning. Armeret prisme



Figur 9.5.1 Skrå belastning

Skrå belastede prizmer kan også behandles med den fundne løsning, se figur 9.5.1, idet Rankine-zonen under lastpladen blot drejes

svarende til belastningsretningen.



Figur 9.5.2 Armeret prisme

Ligeledes kan armerede prizmer med flydning i armeringen behandles, se figur 9.5.2, idet man blot skal medtage armeringskraften i ligevægtsligningerne for det afbrækkede legeme.

Da den trækraft, som i det uarmerede prisme blev overført ved trækspændinger i betonen, nu overtages af armeringen, vil trækflydelinjen reduceres, og bæreevnen vil være mere uafhængig af trækstyrken.

Man skal være opmærksom på faren for forankringsbrud i det afbrækkede legeme. Der kan ikke regnes med større bæreevne af armeringen end den kraft, der kan overføres til betonen her.

## 10 Forankring

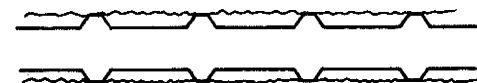
### 10.1 Indledning

Ved enden af en trækpåvirket armeringsstang i beton er kraften i stangen stort set nul. Et stykke derfra kan kraften være betydelig, f.eks. lig med stangens flydekraft. I det mellemliggende stykke bliver denne kraft overført fra armeringsstangen til betonen. Man siger, at stangen er forankret i betonen. Længden af det betragtede stykke af stangen kaldes forankringslængden. For en given forankringslængde er der en grænse for, hvor stor en kraft der kan overføres. Forankringens bæreevne afhænger altså af dens længde.

Bæreevnen afhænger dog også af andre forhold. To af disse forhold skal omtales her, nemlig jernets udformning og sidetryk i forankringszonen.

For glatte armeringsjern kan det ske, bl.a. på grund af armeringsstangens elastiske tværsammentrækning, at betonen slipper hele vejen rundt om stangen, som derfor trækkes ud af et hul i betonen. Dette brud kan ske ret pludseligt. Den tilhørende styrke kan iøvrigt afhænge meget af udstøbningens kvalitet.

For at undgå dette brud fremstilles armeringsjern også med ribber eller kamme. Disse vil selv med en dårlig vedhæftning mellem jern og beton muliggøre overførsel af kræfter både parallelt med og vinkelret på stangen. Dette kan ske ved tryk direkte på ribberne. Den stærkeste forankring fås formentlig, når bruddet omkring stangen sker i betonen i den cylinderflade, der indhyller stangen med ribberne. Dette brud sker i betonen mellem ribberne og følger ribbernes kant, se figur 10.1.1. Da bruddet for en meget stor del forløber i betonen, er bæreevnen nær, hvad man kunne kalde en fuldstændig forankring, dvs. en overførsel af kraft mellem de to materialer, hvor den maksimale overførsel bestemmes af det svageste af dem, og hvor grænsen altså ikke giver nogen svækkelse.



Figur 10.1.1 Ideelt forankringsbrud langs armeringsjern med kamme.

Ved at fremstille jernene med kamme har man forøget muligheden for overførsel af kræfter på langs ad stangen, dvs. man har forøget friktionen i samlingen. Jernenes udformning har altså betydning for forankringen.

For at opnå det ideelle brud, som er vist på figur 10.1.1, ved en ringe vedhæftning mellem jern og beton, kræves et vist ydre tryk ind mod jernet. Hvis dette tryk ikke findes, vil også betonen mellem kammene fjernes fra jernet ved bruddet. Heraf vil følge en lavere bæreevne. Af dette indses, at omgivelsernes modhold har en indflydelse på forankringens bæreevne; normalt trykket påvirker den maksimale kraft, der kan overføres ved forskydning.

Modholdet kan komme fra forskellige kilder. Ved enden af en simpelt understøttet betonbjælke skal de langsgående armeringsjern i bunden af bjælken forankres. Netop her er der imidlertid ofte et tryk på bunden af bjælken fra vederlaget, og dette tryk hjælper med til at forøge forankringens bæreevne. Modholdet kan også komme fra en armering, der ligger omkring den stang, der skal forankres: Før betonen kan "sprænges" bort fra stangen, træder den omkringliggende armering i funktion og leverer et modhold. Er der ingen armering omkring den stang, der skal forankres, og ligger den nær nogle ubelastede betonoverflader, er der kun betonens trækstyrke tilbage, som kan levere et modhold. Det modhold, der kan præsteres på denne måde, er ikke særligt stort, og man vil se, at armeringsstangen "flækker" betonen, og at forankringens bæreevne bliver lav.

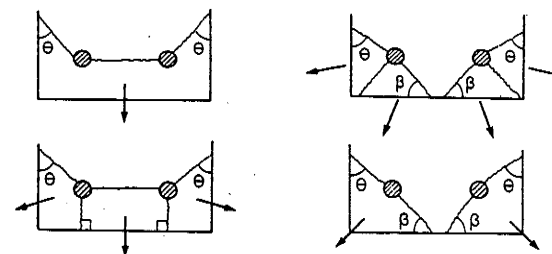
Modholdet er naturligvis ikke bare én størrelse, trykket ind på stangen; det kan variere rundt om stangen. En stang kan være forankret ved vederlaget i bunden af en bjælke tæt ved dens side. Den vil få et godt modhold nedefra fra reaktionen, mens modholdet fra siden vil være langt mindre, især hvis der ikke er nogen bøjlearmering her.

I betonnormen DS411 [73.3] anvendes forankringslængden, den nødvendige længde for at forankre for en kraft lig med stangens flydebæreevne. For forskellige typer af armeringsstål angives denne længde som et bestemt antal ganget med armeringsstangens diameter. For ribbestål afhænger dette antal af den såkaldte forankringsfaktor,

$\zeta$ , som bestemmes ved et standardiseret forsøg beskrevet i DS 2082 Armeringsstål, Prøvning af forankringsevnen [80.2]. I DS 411 skrives også, at forankringens bæreevne kan regnes proportional med længden ned til en vis minimal forankringslængde, som altså altid skal overholdes. Det nævnes, at forankringslængden kan reduceres yderligere, hvis der kan dokumenteres en gunstig virkning af en øget tværarmering eller af reaktionen, dvs. af et ydre tryk på betonen netop ved forankringen. I normens vejledning siges det, at forankringslængden kan reduceres med 30%, hvis tværarmeringsmængden øges til 3 gange det normale, defineret ved formel (V 7.2.4.1).

Af hensyn til det farlige brud for glatte armeringsjern kræves disse i visse tilfælde forankret med kroge.

Uwe Hess har i [79.3] behandlet forankringsproblemer for forkammede jern. Hans behandling tager hensyn til armeringsstængernes udformning og til modholdets variation i forskellige retninger. Han arbejder med øvreverdieregninger og beskriver bruddene ved hjælp af den vinkel med armeringsjernet, hvorunder betonen bevæges væk fra dette, samt forskellige sprængnings- og flækningsmekanismer for bruddets forløb væk fra jernet, se figur 10.1.2.

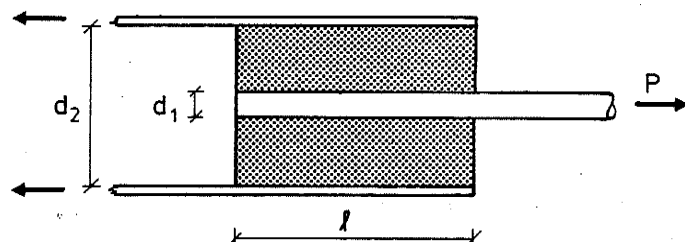


Figur 10.1.2 Øvreverdi-mekanismer for forankringsbrud.  
Fra Uwe Hess [79.3].

I den følgende behandling vil der blive gjort nogle simplifikationer i forhold til det førnævnte. Der vil kun blive behandlet plane og rotationssymmetriske forankringsproblemer og ikke de mere komplicerede geometrier, som fremgår af figur 10.1.2. Overførslen af kraft mellem jern og beton vil også blive behandlet simplere, idet jernet antages at have en delvis ru overflade til

erstatning for ribbernes geometri. Der vil fortrinsvis blive arbejdet med en "fuldstændig ru" overflade, dvs. at der anvendes betonens flydebetingelse også langs jernet.

De opnåede løsninger vil til gengæld være teoretisk eksakte løsninger på de stillede opgaver.

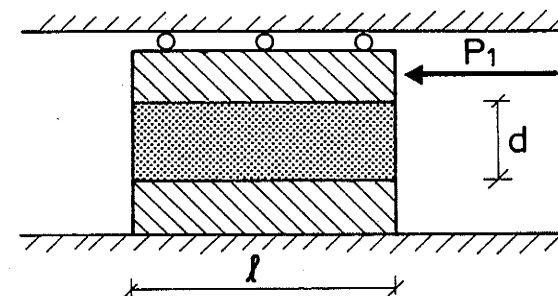


Figur 10.1.3 Forankring. Ideel model.

Den grundlæggende opgave er vist på figur 10.1.3 i snit. Det viser en armeringsstang med diameter  $d_1$  indstøbt i beton i et rør med indre diameter  $d_2$ . Indstøbningens længde er  $l$ . Betonen er et Coulomb-materiale med trykstyrken  $f_c$ . Røret antages at kunne levere et vist tryk  $p$  mod betonen, mens det har uendelig, dvs. tilstrækkelig styrke over for de normalspændinger, det får. Armeringsstangen antages også at kunne modstå de spændinger, der kommer i den. (I modsat fald er bæreevnen meget let af beregne). Flydebetingelsen mellem beton og jern antages først at være fuldstændig vedhæftning, dvs. samme betingelse som i betonen. Senere indføres en svagere betingelse. Der påføres en trækraft  $P$  i armeringsstangen, og der holdes igen med samme kraft i røret. Bæreevnen for denne belastning ønskes fundet.

Figur 10.1.3 kan imidlertid også opfattes som et snit i et område med plan deformationstilstand. Det forestiller da en plade, som er indstøbt i beton mellem to andre plader. Denne model vil blive behandlet først, da den er simplere at løse end den rotationssymmetriske.

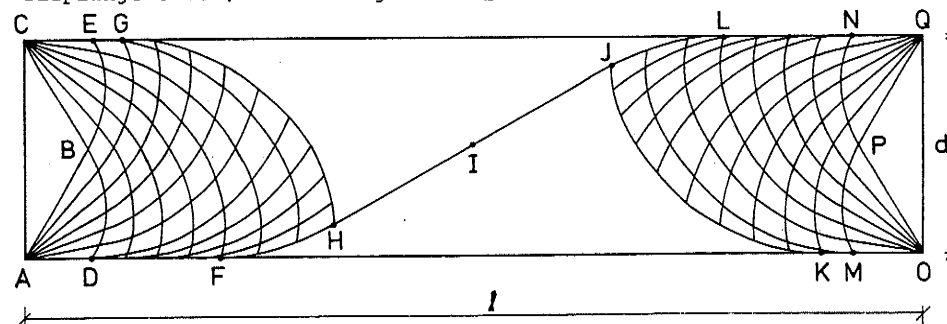
## 10.2 Plan deformationstilstand



Figur 10.2.1. Forankring, plan deformationstilstand, uendelig stærkt modhold.

Ved plan deformationstilstand er der for de to betonområder ingen forskel på den midterste plade på figur 10.1.3 og de yderste. Situationen kan derfor vises som på figur 10.2.1, der viser det ene betonområde med længden  $l$  og højden  $d = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)$  omsluttet af to plader. På figuren er illustreret betydningen af det uendelige modhold. Den relative bevægelse af de to plader er en translation parallel med pladerne.

Løsningen på dette problem er vist på figur 10.2.2. Sliplinjefeltet er symmetrisk om rektanglets midtpunkt I. Det indeholder to stive dele, GHIJL og KJIHF, som translateres i forhold til hinanden. Da vinklen mellem den relative flytning og flytningsdiskontinuitetslinjen skal være  $\varphi$ , hælder grænselinjen HIJ netop  $\varphi$  i forhold til pladerne. Udover de to stive områder er der to sliplinjefelter, CEGHFD og OMKJLNQ.



Figur 10.2.2. Sliplinjefelt, plan forankring, uendeligt modhold.

Felterne er opbygget udefra med Rankinezonen ABC, Prandtlzonerne ABD og CBE, samt udfyldningszonen BEGHFD. I denne zone er EG og DF indhyllingslinjer for sliplinjerne. Feltet bestemmes derfor ved trinvis benyttelse af andet og tredje begyndelsesværdiproblem, jvf. afsnit 5.2. Hvis zonen længde bliver stor, vil feltet nærme sig (asymptotisk) til cykloidefeltet, som er omtalt i afsnit 5.5. Punktet H er fundet, som det punkt i udfyldningszonen, hvor hovedspændingsretningen er den rigtige ( $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ ), og hvor tangenten til a-sliplinjeretningen går igennem I.

De zoner, der er vist på figur 10.2.2, udgør den "ufuldstændige" løsning på problemet, dvs. de angiver spændingerne der, hvor der sker deformationer ved den tilhørende mekanisme. Der kan imidlertid let angives mulige, tilladelige spændinger også i de stive områder. Det sker ved "udfyldning" (andet begyndelsesværdiproblem, jvf. afsnit 5.2). Grundlaget er sliplinjerne HG og HIJL for det øverste stive legeme på figur 10.2.2, og tilsvarende for det nederste. De herved fundne spændinger vil være et sæt mulige spændinger i området. Spændingsbestemmelsen er imidlertid ikke entydig her, da der ikke sker plastiske deformationer ved mekanismen.

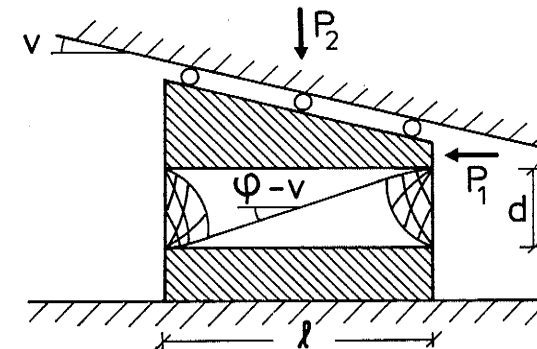
Ved mekanismen sker deformationerne således: Det øverste stive legeme translateres parallelt med pladerne, til venstre på figur 10.2.2. Deformationerne i de to sliplinjefelter bliver bestemt ved flytningen af grænsesliplinjerne til de stive områder, samt en grænsebetingelse langs pladerne. Her siger normalitetsbetingelsen (som ved enhver flytningsdiskontinuitetslinje): Der skal være vinklen  $\varphi$  mellem flytningsretning og flytningsdiskontinuitetslinje.

I mekanismen bliver ADFHIJLNQ en flytningsdiskontinuitetslinje. Ved indhyllingskurverne GE og KM sker der imidlertid også en sådan opsummering af flytning, så linjerne GEC og KMO bliver flytningsdiskontinuitetslinjer. Med den volumenudvidelse, der sker, bliver den vandrette flytning af de yderste Rankine-zoner større end pladernes flytning; materialet "skubbes ud" i begge ender.

Da det nu er vist, at løsningen både er en øvre- og en nedreværdiløsning, indses det, at den er den korrekte løsning.

Når sliplinjefeltet er fundet, kan bæreevnen findes ved at beregne summen af spændingerne langs ADFHIJLNQ. Resultatet heraf bliver en forskydningskraft  $P_1$  parallel med pladerne, den forankringskraft vi søgte, og en modholdskraft  $P_2$  vinkelret på pladerne.

Hvis mekanismen er deformationsstyret, som vist ved de små "hjul" på figur 10.2.1, bliver bæreevnen netop  $P_1$ , og der udvikles et modholdstryk på  $P_2$ . Hvis pladerne kun er bundet til at translateres, men retningen er fri, og der påføres et modhold af størrelsen  $P_2$ , vil bæreevnen blive den samme værdi  $P_1$ . Hvis der påføres en anden modholdskraft  $P_2$ , vil bæreevnen få en anden værdi. Hvis  $P_2$  er større end den værdi, der svarede til figur 10.2.1, vil pladerne ved mekanismen nærme sig hinanden samtidig med den forskydende bevægelse, og hvis den er mindre, vil de fjerne sig fra hinanden. Variationen af  $P_1$  som funktion af  $P_2$  kan findes ved at variere hældningen af linjen HIJ på figur 10.2.2. Som nævnt er der en vinkel på  $\varphi$  mellem denne linje og translationsretningen, se figur 10.2.3.



Figur 10.2.3 Sammenhængen mellem translationsretningen og hældningen af grænselinjen mellem de to stive områder.

Denne løsning gælder imellem to grænser for translationsretningen, udtrykt ved den vinkel  $v$  med pladerne, hvorunder disse fjerner sig fra hinanden.

Hvis  $v$  når værdien  $\varphi - \arctan(d/l)$ , bliver grænselinjen diagonal i rektanglet, og deformationen i sliplinjefelterne bliver nul; al deformation bliver koncentreret i diagonalen. For større værdier

af  $v$  afhænger bæreevnen af trækstyrken. Dette behandles senere i dette kapitel.

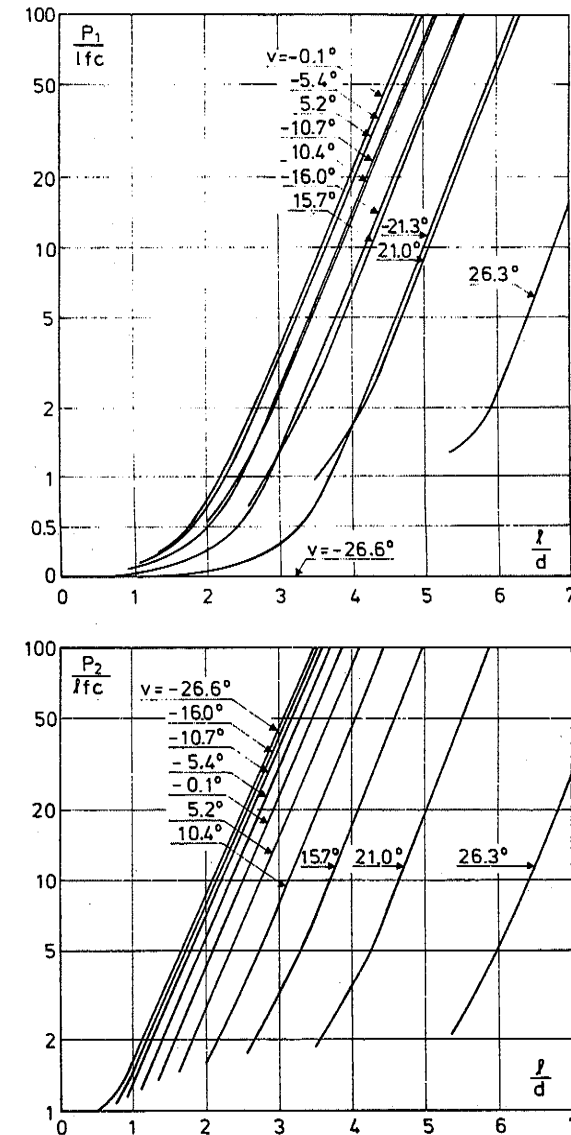
For  $v = -(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$  er grænsefliplinjen svundet ind til et punkt, og de to sliplinjefelter når sammen på midten. Sliplinjefeltet er blevet symmetrisk om både den vandrette og den lodrette midterakse. Der overføres ikke længere nogen forskydende kraft  $P_1$ . Det problem, der er løst, er trykstyrken af prøven. Dette er behandlet i afsnit 7.2, se f.eks. figur 7.2.2. Løsningen dér er altså et ydertilfælde af det problem, der behandlet i dette kapitel.

For  $l/h$  beliggende i intervallet fra 0.5 til ca. 7 og for forskellige værdier af  $v$  er på figur 10.2.4 vist bæreevnen udtrykt ved  $P_1$  og  $P_2$  for et Coulomb-materiale med betons friktionsvinkel  $\varphi = 36.9^\circ$ . På grund af den store variation i værdierne af  $P_1$  og  $P_2$  er ordinator mellem 0 og 1 vist lineært, mens ordinator over 1 er vist i logaritmisk afbildning. Ordinaterne er gjort dimensionsløse ved division med længden og trykstyrken.

For forskellige værdier af  $l/d$  kan sammenhørende værdier af  $P_1$  og  $P_2$  plottes til en todimensional "flydeflade" for laget. Dette er vist på figur 10.2.5 for  $l/d = 1, 2, 3$  og 4.

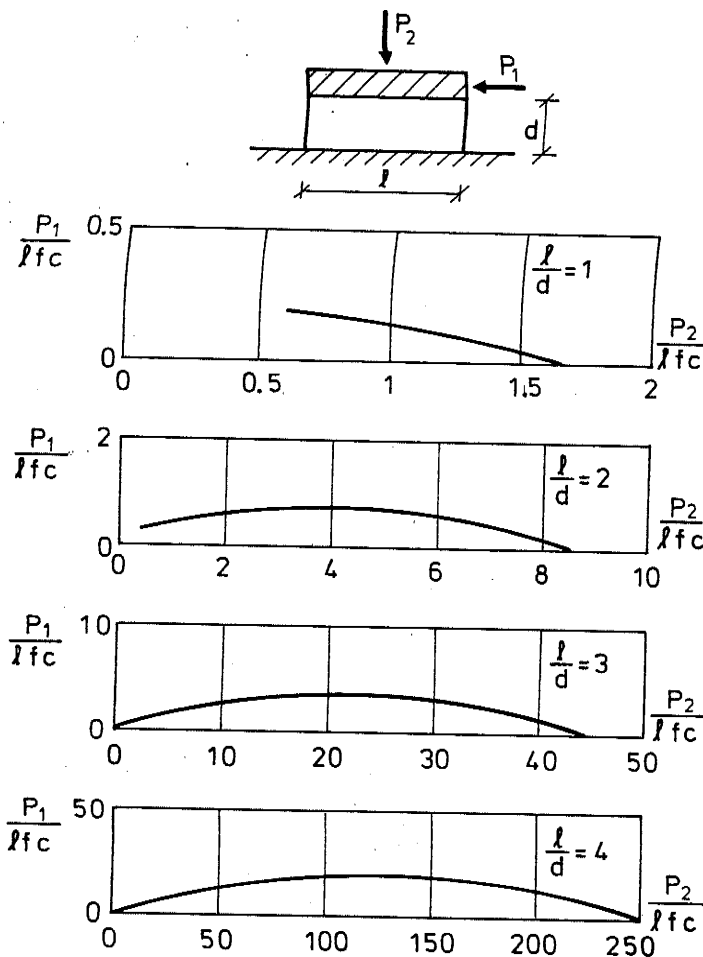
Da en sammensætning af idealt plastiske materialer også vil give en "idealt plastisk" konstruktion, jvf. kapitel 2, kan translationsretningsvinklen  $v$  aflæses som hældningsvinklen (med ordinataksen, positiv mod venstre) af normalen til flydefladen. Heraf følger, at den største forskydningsbæreevne (den største værdi af  $P_1$ ) fås for  $v = 0$ , dvs. for en translation af pladerne med konstant afstand, som vist på figur 10.2.1. Grænseværdien af normalens hældning, når punktet nærmer sig spidsen med  $P_1 = 0$ , er  $v = -(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$ .

Hvis materialet ikke følger den associerede flydelov, kan deformationen for en given kombination af  $P_1$  og  $P_2$  foregå med en mindre værdi af  $v$  end den, der skulle gælde ifølge f.eks. figur 10.2.5. Figur 10.2.5 gælder dog stadig for bæreevnen; for en given værdi af  $P_2$  fås den samme værdi af  $P_1$  som før, men deformationen er anderledes. I det deformationsstyrede forsøg, som er vist på figur 10.2.1, kan derfor godt fås en mindre værdi af  $P_1$  end den, der fås for et materiale, som følger den associerede flydelov. Samtidig fås dog også en (meget) mindre værdi af  $P_2$ , idet punktet er flyttet til venstre for toppunktet på en af kurverne i figur 10.2.5.



Figur 10.2.4. a. forskydningskraft  $P_1$  og b. trykkraft  $P_2$  ved forskydning i forskellige retninger  $v$  (se figur 10.2.3) af rektangulært lag af Coulomb-materiale.  $\varphi = 36,9^\circ$ .





Figur 10.2.5 Flydeflader for plan forankring.  $\varphi = 36,9^\circ$ .

Kurverne på figur 10.2.5 indeholder et retlinet stykke, som svarer til de tilfælde, hvor bruddet sker langs en diagonal, og flytningen har retningsvinklen  $v = \varphi - u$ ,  $u = \arctan (d/l)$ . Værdierne i de to endepunkter kan findes efter nogen regning. De er

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} f_c l \left[ \frac{\cos(\varphi - u)}{\cos u} e^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2u\right) \tan \varphi} - \tan u \left(1 + \frac{1}{\sin \varphi} \left(e^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2u\right) \tan \varphi} - 1\right)\right) \right] \\ P_2 &= \frac{1}{2} f_c l \left[ 1 + \frac{1}{\sin \varphi} \left(e^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2u\right) \tan \varphi} - 1\right) - \frac{\sin(\varphi - u)}{\cos u} e^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2u\right) \tan \varphi} \right] \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (10.2.1) \\ (10.2.2) \end{matrix}$$

og

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} f_c l \times \frac{\cos(\varphi - u) - \sin u}{\cos u} \\ P_2 &= \frac{1}{2} f_c l \times \left(1 - \frac{\sin(\varphi - u)}{\cos u}\right) \end{aligned} \right\} (10.2.2)$$

Det førstnævnte af disse punkter, hvor der er den største værdi af  $P_2$ , svarer til det førnævnte punkt, hvor al deformation netop er blevet koncentreret i en linje. Af zonerne på figur 10.2.2 er kun de yderste Rankine-zoner og en del af Prandtl-zonerne ABD og QNP tilbage.

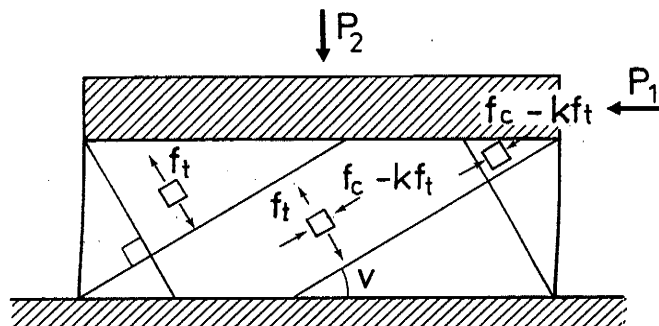
Ved det andet punkt, formel (10.2.2), er spændingstilstanden et skråt enakset tryk i en del af området, afpasset sådan, så brudlinjen netop bliver en sliplinje i dette felt.

Løsningen til venstre for dette punkt afhænger af trækstyrken. Hvis denne er nul, svarer løsningen til et skråt tryk under en vinkel med vandret, som aftager til nul. På figur 10.2.5 viser dette sig som en cirkelbue gennem origo. Denne kan findes ved i (10.2.2) at opfatte  $\varphi$  som en parameter i intervallet fra  $\varphi$  (friktionsvinklen) til  $\frac{\pi}{2}$ . Cirklen, den rette linje og den tidligere fundne kurve for større tryk går glat over i hinanden.

Hvis trækstyrken ikke er nul, flyttes det venstre endepunkt af flydefladen fra origo til punktet med abscissen  $-f_t/f_c$ . I det følgende er det kun cirkelbuen til venstre for den tidligere omtalte retlinede del, der skal ændres, da det er her trækstyrken har indflydelse.

En øvreværdiløsning fås således: Man finder det punkt, hvor den rette linje skærer abscisseaksen. Kurven multipliceres med et tal ud fra dette punkt, sådan at spidsen kommer til at ligge det rigtige sted, se figur 10.2.7. Dette er den løsning, der fås ved at anvende den samme mekanisme som den, der blev anvendt, hvis trækstyrken var nul.

Hvis man vil finde en tilsvarende nedreværdiløsning, ser man, at det, der mangler, er en belastning på endefladerne. En nedreværdiløsning kan laves som vist på figur 10.2.6, hvor der både er et skråt tryk og et træk. Forskellen til øvre værdien ligger i spændingerne ved områdets ender.



Figur 10.2.6 Nedreværdiløsning med trækstyrke.

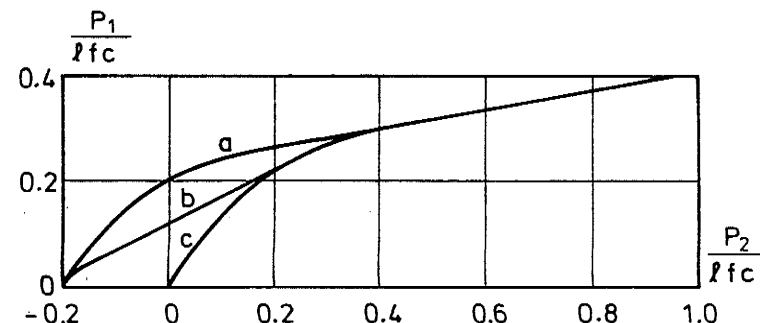
Vinklen mellem pladerne og trykhovedspændingsretningen kaldes  $v$ . Bæreevnen bliver

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{1f_c}{2\cos u} [(1-kp)(\sin(2v-u) - \sin u) + p(\sin(2v+u) - \sin u)] \\ P_2 &= \frac{1f_c}{2\cos u} [(1-kp)(\cos u - \cos(2v-u)) - p(\cos(2v+u) + \cos u)] \end{aligned} \right\} \quad (10.2.3)$$

Løsningen gælder i intervallet  $u \leq v \leq \frac{\pi}{2} - u$ . For større værdier af  $v$  gælder den tidligere nævnte eksakte løsning. For mindre værdier af  $v$  kan trykbåndet på figur 10.2.6 udelades, og bæreevnen fås af (10.2.3) ved kun at medtage det andet led ( $k$  sættes formelt lig med  $1/p$ ).

Da enhver linearkombination (med positive koefficienter, hvis sum er 1) af nedreværdiløsninger også er en nedreværdiløsning, skal de cirkler, der fås af (10.2.3) i  $P_1P_2$ -planen, forbindes med deres tangentlinjer, så man får en konveks flydeflade.

Øvre værdiløsningen og nedreværdiløsningen er illustreret på figur 10.2.7 for  $1/d = 2$ .



Figur 10.2.7 Løsninger med endelig trækstyrke  $f_t = 0.2 f_c$ .  
a. Øvre værdiløsning. b. Nedreværdiløsning (10.2.3).  
c. Eksakt løsning uden trækstyrke.

### 10.3 Rotationssymmetrisk tilstand

Ved udtrækning af en cirkulær stang indstøbt i et rør er der tale om rotationssymmetrisk tilstand. Løsningen på dette problem minder noget om løsningen ved plan deformationstilstand. Derfor tages udgangspunktet i denne løsning.

Først antages modholdet at være så stærkt, så det ikke giver efter. Løsningen skal så være den analoge til den, der er vist på figur 10.2.2.

Ved rotationssymmetriske beregninger af sliplinjefelter skal man vide noget om ringspændingens værdi  $\sigma_\theta$ . Den afgøres bl.a. af fortegnet på den radiære flytning. Den radiære flytning af områdets begrænsninger er nul. En del af begrænsningslinjerne er indhyllingskurver for sliplinjer, og de er dermed flytningsdiskontinuitetslinjer. Da materialet ved deformationen vil fjerne sig fra begrænsningen, fås en radiær flytning mod centrum, dvs. negativ, ved den ydre begrænsning og bort fra centrum, dvs. positiv, ved den indre begrænsning.

Ifølge kapitel 5.9 gælder, at

$$u_r > 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_0 > \sigma_2$$

$$u_r < 0 \Rightarrow \sigma_1 > \sigma_0 = \sigma_2$$

og da  $u_r$  har begge fortegn i området, bliver  $\sigma_0$  altså diskontinuert langs en linje igennem sliplinjefelterne. Placeringen af denne linje kendes ikke ved beregningens begyndelse, men skal findes ved en form for iteration. Med en skønnet placering af linjen kan spændingerne nemlig beregnes. Herefter kan flytningerne beregnes, og det kan kontrolleres, om der er overensstemmelse mellem fortegnet på den radiære flytning og den valgte værdi af  $\sigma_0$ . Er der ikke det, ændres  $\sigma_0$ , dvs. linjen flyttes, og der regnes om. Først når der er opnået overensstemmelse mellem  $\sigma_0$  og  $u_r$ , er beregningen korrekt. I den største del af området vil det da gælde, at  $u_r > 0$ .

På grund af de ændrede ligevægtsligninger bliver Rankine- og Prandtl-zonerne på figur 10.2.2 ændret til nogle andre med krumme sliplinjer i begge retninger. Prandtl-zonernes yderste sliplinjer, AD, CE, QN og OM på figur 10.2.2, bliver nu krumme, så der må indsættes udfyldningszoner, som indhyller begrænsningslinjerne, allerede fra Prandtl-zonernes pol.

Linjen HIJ, som adskiller de to stive legemer, er geometrisk bestemt, idet den skal holde  $\varphi$  i forhold til rotationsaksen. Dette er ikke ændret. Nu er spændingerne imidlertid ikke længere konstante langs linjen. Sliplinjefelterne for enderne af området bliver heller ikke længere ens, men skal beregnes hver for sig.

For at finde bæreevnen ved en given geometri skal man altså beregne de to sliplinjefelter. Heri er inkluderet at finde den linje i hvert felt, som skiller området, hvor den radiære flytning er positiv, fra området, hvor den er negativ. Herefter skal man indlægge grænsesliplinjen, som forbinder de to områder. Den skal naturligvis tangere felternes sliplinjer i sine endepunkter, og spændingen skal have de rigtige værdier i endepunkterne. Ved fastlæggelsen af forbindelseslinjen kan udstrækningen af de to sliplinjefelter være blevet ændret i forhold til det, der blev anvendt ved beregningen af de to felter. Hvis dette er tilfældet, er flytningerne i de to zoner blevet ændret. De må så beregnes igen, hvorefter ringspændingen korrigeres osv. Når flytnings-fortegns-skillelinjerne atter er fastlagt, indlægges igen grænsesliplinjen.

Der foretages således en dobbelt iteration for at finde spændingerne.

Da alt dette er en lang og kompliceret affære, hvor en del vanskeligt kan programmeres, har jeg ikke gennemført en sådan iterationsberegning.

Hvis modholdets bæreevne ikke er tilstrækkelig til at forhindre en udvidelse af røret, kompliceres forholdene yderligere. Nu vil områdets ydre begrænsningslinje få en udadrettet radiær flytning samtidig med dens langsgående bevægelse. Herved vil man ved tilstrækkelig store radiære flytninger opnå den lettelse, at den radiære flytning får samme fortegn overalt, så der ikke ved iteration skal opsøges en fortegns-skillelinje.

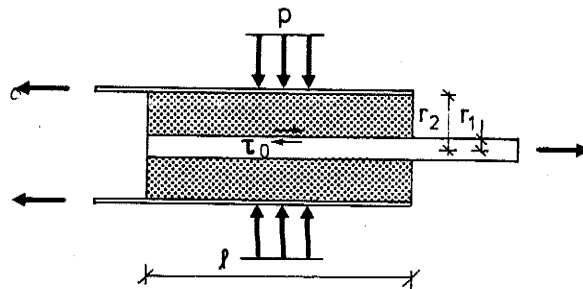
Imidlertid vil det ene af de indtil nu stive legemer i mediet nu få en positiv radiær flytning og dermed en positiv tøjning  $\epsilon_r > 0$ . Hermed er området ikke længere stift. Da den primære tøjning er  $\epsilon_r$ , og da der er et stort tryk i området, er der grund til at formode, at de to hovedtøjninger i planen begge er negative, og at vi altså har fået et eksempel på mulighed 1 fra kapitel 5.9:  $\sigma_0 > \sigma_1 \geq \sigma_2$ . At beregne et sådant felt er ikke nogen standard-sliplinjeopgave.

Linjen HIJ er nu ikke nødvendigvis en ret linje, da den ikke længere adskiller to stive legemer. Man kan se, at en sådan beregning er uhyre kompliceret, og jeg har da heller ikke udført en sådan.

Modellen for eftergivelse har været den enklaste mulige, nemlig at modholdet flyttes lige langt overalt. En mere realistisk model for et rør med en vis tykkelse er, at røret giver efter der, hvor trykket på røret er så stort, at ringspændingen når flydespændingen. Andre steder giver røret ikke efter. I en sådan model vil detaljerne i flytningsbestemmelsen også påvirke spændingsbestemmelsen, hvad der ikke er sædvanen i almindelige sliplinjeberegninger.

Da de resultater, der fås for uendeligt modhold, giver meget store spændinger og tryk på modholdet, vil bæreevnen meget ofte være bestemt af modholdets styrke. Man kan lave en simplificeret beregning for det tilfælde, hvor bæreevnen primært er bestemt af modholdet. Denne gennemgås i næste afsnit.

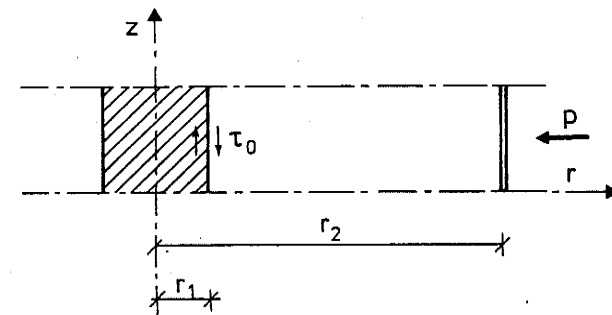
#### 10.4 Lang, rund forankring



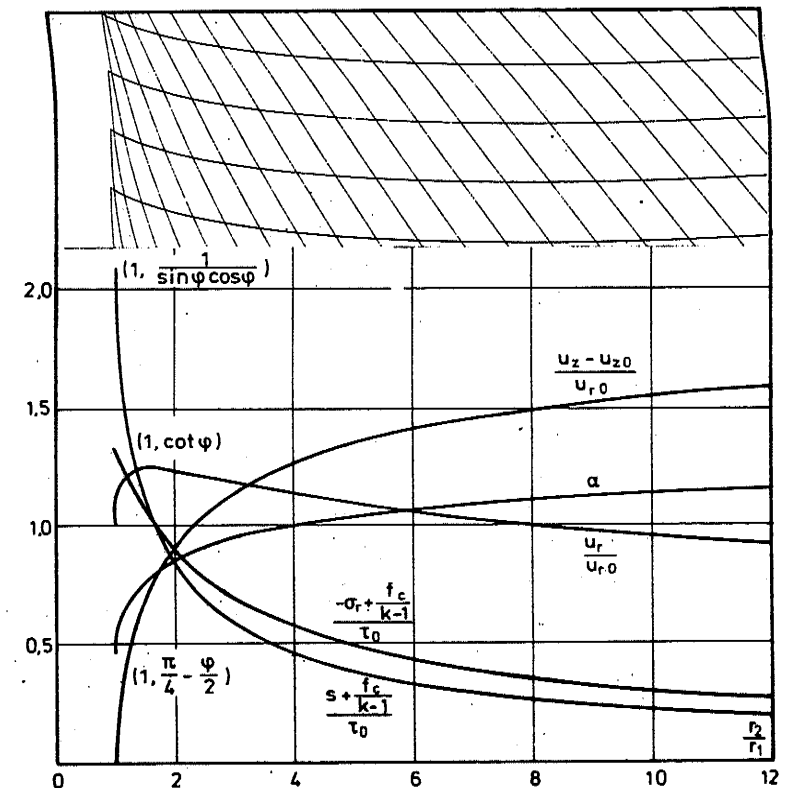
Figur 10.4.1 Lang forankring i rør, begrænset modhold.

På figur 10.4.1 er vist en lang forankring af en stang indstøbt i et rør. At forankringen er lang vil sige, at længden er betydeligt større end forankringslagets tykkelse,  $l \gg r_2 - r_1$ . Røret kan yde et vist modhold  $p$  (trykspændingen på dets inderside), før det flyder. Hvis ikke  $p$  er meget høj ( $p \gg f_c$ ), vil røret flyde ved udtrækningen. Når der ses bort fra nogle områder ved enderne, vil spændingerne i betonen være bestemt af modholdet. Hvis dette er konstant langs røret, vil spændingerne være uafhængige af koordinaten  $z$  langs rotationsaksen. Med en endelig længde af forankringen nås denne tilstand muligvis kun asymptotisk, men den vil alligevel give en god beskrivelse af spændingerne i betonen og en værdi af bæreevnen.

Hvis forankringens ender er ubelastede, vil spændingerne her være lavere end midt i forankringen, og der bør trækkes en vis længde fra forankringens virkelige længde inden beregning af forankringens bæreevne. Ved de praktiske tilfælde, der her søges modelleret, vil forankringen ofte være indstøbt i et større betonlegeme. Der vil da være beton også for enderne af det på figur 10.4.1 viste område. Det endemodhold, der herved fås, kan forøge spændingerne her, så de bliver større end spændingerne midt i forankringen. Der bliver da tale om et ekstra endebidrag til bæreevnen. Den model, der vil blive beskrevet i dette kapitel, kan altså være på den sikre eller usikre side, afhængigt af forholdene uden for det egentlige forankringsområde.



Figur 10.4.2 Beregningsmodel for en lang forankring.



Figur 10.4.3 Sliplinjefelt for lang, rund forankring.  $k = 4 \Rightarrow \varphi = 36,9^\circ$ . Kurver over hovedspændingsretning (i radian), spændinger og flytninger i feltet. Index 0 henviser til størrelserne ved stangen ( $r = r_1$ ).

Det er naturligvis en forudsætning for beregningen, at både røret og stangen kan optage de kræfter på langs ad samlingen, som de måtte blive udsat for. I modsat fald er bæreevnen meget nem at beregne, den bliver nemlig lig med trækstyrken af røret eller stangen.

- Det problem, vi er nået frem til, kan formuleres således: Bestem bæreevnen af den på figur 10.4.2 viste konstruktion bestående af en stiv, tilstrækkelig stærk stang med radius  $r_1$ , fuldstændig forbundet til en kappe af beton, ved hvis ydre rand med radius  $r_2$  der kan optages en vilkårlig forskydningsspænding, men kun et begrænset normaltryk  $p$ . Den stive stang flyttes langs rotationsaksen (nedad), og bæreevnen skal udtrykkes ved den forskydningsspænding  $\tau_0$ , der overføres til den. Alle flytninger, tøjninger og spændinger er uafhængige af koordinaten  $z$  langs rotationsaksen.

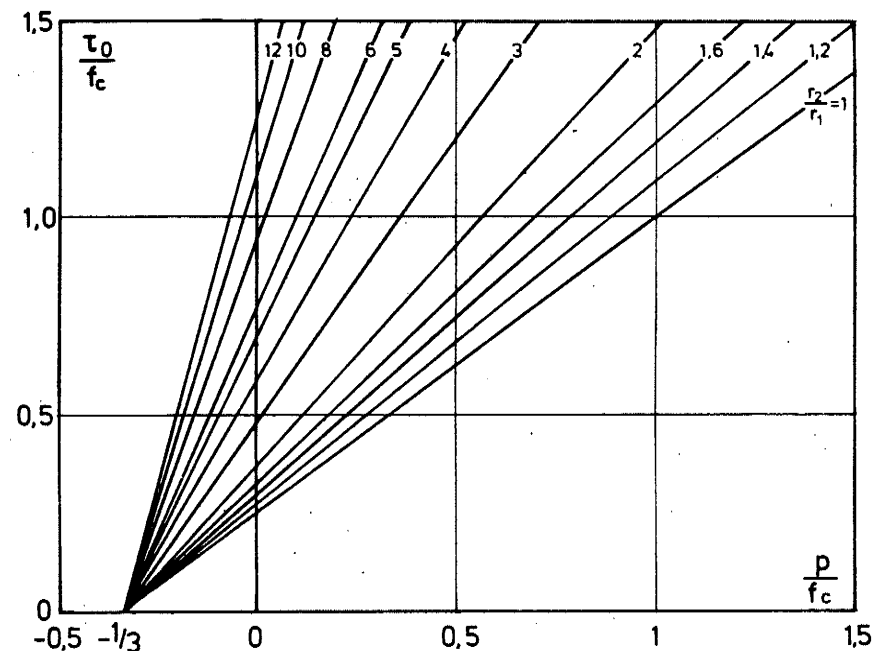
Da den radiære flytning  $u_r$  vil være positiv, er ringsspændingen  $\sigma_\theta$  lig med den største hovedspænding  $\sigma_1$ . Der må være flydning langs stangen i snit, der følger dens overflade; ellers vil nemlig både tøjning og radiær flytning i betonen være nul. Første hovedspændingsretning her må derfor være  $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ . Stangens frembringer kan imidlertid ikke være én lang sliplinje. Langs en sådan linje vil spændingerne nemlig variere (i rotationssymmetrisk tilstand), hvilket ikke er tilladt. Frembringeren må derfor være indhyllingskurve for det ene sæt sliplinjer (b-linjerne).

Ved at antage et bestemt spændingsniveau langs frembringeren kan man bestemme det sliplinjefelt, som netop indhyller frembringeren. Dette er vist på figur 10.4.3. (s er indført i kapitel 4). Løsningen kan transformeres til et andet spændingsniveau ved i ethvert punkt at transformere alle normalspændinger  $\sigma$  og forskydningsspændinger  $\tau$  til  $\sigma'$  og  $\tau'$ , hvor

$$\left. \begin{aligned} \sigma' - \frac{f_c}{k-1} &= t \left( \sigma - \frac{f_c}{k-1} \right) \\ \tau' &= t \tau \end{aligned} \right\} \quad (10.4.1)$$

$t$  er et positivt, men iøvrigt valgfrit tal. Hovedspændingsretningen og flytningerne er uændret. De på figur 10.4.3 viste kurver er derfor uafhængige af værdien  $\tau_0$  af forskydningsspændingen langs stangen.

Af kurven over  $\sigma_r$  på figur 10.4.3 bestemmes de på figur 10.4.4 viste kurver over bæreevnen  $\tau_0$  som funktion af modholdet  $p$  og forholdet mellem største og mindste radius af betonkappen, samt naturligvis betonens trykstyrke. Alle kurverne er rette linjer, og de går igennem punktet  $(p/f_c, \tau_0/f_c) = (-1/(k-1), 0)$ . For  $r_2/r_1 = 1$ , dvs. for den plane løsning jvf. afsnit 10.2, er linjens hældning  $\tan \varphi$ , her 0.75.



Figur 10.4.4 Bæreevnen ved en lang, rund forankring. Umodificeret Coulomb-materiale.  $k = 4 \Rightarrow \varphi = 36,9^\circ$ .

Den hidtil omtalte løsning gælder for det ikke modificerede Coulomb-materiale, dvs. for et materiale med trækstyrken  $f_t = f_c/(k-1)$ . I det modificerede Coulomb-materiale haves en mindre trækstyrke. Da trykket i kappen aftager udefter, jvf. den faldende kurve over  $s$  på figur 10.4.3, kan trækstyrken få indflydelse, hvis modholdet er under en vis grænse. Denne grænse kan findes for enhver værdi af  $r_2/r_1$ . Værdien af kurven over  $s$  på figur 10.4.3 aflæses, og heraf bestemmes  $\tau_0$  ved at indsætte den værdi af  $s$ , som giver første (træk-) hovedspænding  $\sigma_1$  netop lig med trækstyrken  $f_t$ :  $s = \frac{1}{2}(f_c - (k+1)f_t)$ .

Denne grænsekurve ses indtegnet på figur 10.4.6.

Selv om grænsen overskrides, kan løsningen imidlertid godt findes. Først vil spændingerne blive undersøgt, og det vil derefter blive vist, at de fundne spændinger også svarer til et sæt mulige flytninger.

I de zoner, hvor den hidtil fundne løsning ikke gælder på grund af den manglende trækstyrke, må den radiære flytning, og dermed ringtøjningen  $\varepsilon_\theta$ , blive større, end den ellers ville være blevet. Ringspændingen  $\sigma_\theta$  må derfor være så stor som mulig, dvs. lig med trækstyrken  $f_t$ . Dette indsættes i ligevægtsligningerne:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - f_t}{r} = 0 \quad (10.4.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

Løsningen hertil ses at være

$$\sigma_r = \frac{c_1}{r} + f_t; \tau_{rz} = \frac{c_2}{r} \quad (10.4.3)$$

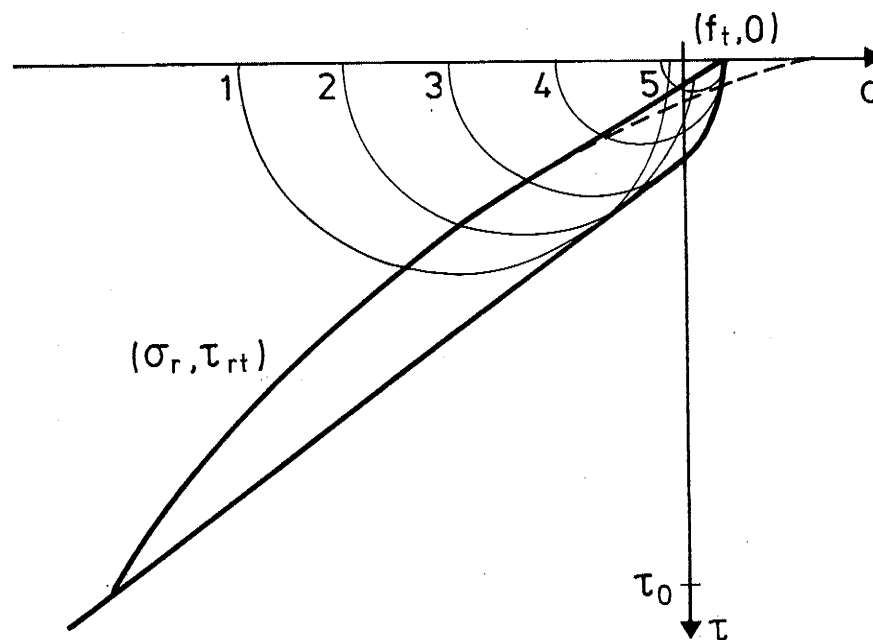
Da forholdet mellem  $\sigma_r - f_t$  og  $\tau_{rz}$  således er uafhængigt af  $r$ , betyder dette, at hovedspændingsretningen  $\alpha$ , som er givet ved

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tau_{rz}}{\sigma_r - \sigma_z} \quad (10.4.4)$$

er uafhængig af  $r$ , hvis blot også  $\sigma_z - f_t$  er omvendt proportional med  $r$ .

Hvis man for  $r$  voksende fra  $r_1$  følger spændingerne optegnet i Mohr's plan, fås først nogle cirkler 1, 2 og 3, se figur 10.4.5, som tangerer linjerne  $\tau = \pm (c - \sigma \tan \varphi)$ . Dette svarer til det umodificerede Coulomb-materiale. Ved cirkel 3 bliver  $\sigma_1 = f_t$ . Dette svarer til det grænsepunkt, der tidligere er beskrevet. Herefter får cirklerne 3, 4 og 5, der alle har en lodret tangent gennem punktet  $(\sigma, \tau) = (f_t, 0)$ . Dette svarer netop til, at  $\sigma_r - f_t$ ,  $\tau_{rz}$  og  $\sigma_z - f_t$  aftager i samme forhold nemlig omvendt proportionalt med  $r$ . Det gælder altså for hovedspændingerne i planen,  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$ , at

$$\sigma_1 = f_t; -f_c + k f_t \leq \sigma_2 < f_t \quad (10.4.5)$$



Figur 10.4.5 Mohr's cirkler for spændingen for voksende afstand fra omdrejningsaksen. Modificeret Coulomb-materiale.

På figur 10.4.5 er indtegnet en kurve for  $(\sigma_r, \tau_{rz})$ . Den er krum indtil skæringen med cirkel 3. Herfra fås en ret linje. For forskellige værdier af  $p$ ,  $\tau_0$  og  $f_t$  vil den krumme del af kurven altid være ligedannet med den viste.

Hermed er der fundet et sæt statisk tilladelige spændinger, der fører belastningen videre under hensyntagen til den begrænsede trækstyrke, dvs. en nedreværdiløsning. At løsningen også er en øvre værdiløsning, vil nu blive vist. Om den tilhørende flytnings-tilstand skal nemlig gælde, at

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &\geq 0 \Rightarrow u_r \geq 0 \\ \varepsilon_1 &\geq 0, \varepsilon_2 = 0 \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

Disse betingelser er opfyldt af en flytningstilstand, hvor både den radiære flytning  $u_r$  og flytningen langs rotationsaksen  $u_z$  er uafhængige af stedet, og hvor  $u_r$  er positiv. Af kontinuitetsgrunde vælges naturligvis de værdier af  $u_r$  og  $u_z$ , som man fik fra beregningen af det umodificerede Coulomb-materiale i grænsepunktet. Det er hermed vist, at der kan knyttes en øvreværdimekanisme til nedreværdiløsningen, og løsningen er da også en øvreværdiløsning, jvf. kapitel 2.

Da løsningen således både er en øvre- og en nedreværdiløsning, er den bæreevne, der kan afledes af spændingerne, en korrekt løsning. Da  $\sigma_r - f_t$  er omvendt proportional med  $r$ , ses det, at for punkter til venstre for grænsekurven på figur 10.4.6 og med en fast værdi af  $\tau_0$ , dvs. på samme vandrette linje, er  $p + f_t$  omvendt proportional med  $r_2/r_1$ . Da værdien af  $r_2/r_1$  er kendt på grænsekurven, kan den nu findes i hele området. Ved at vælge netop den på figur 10.4.6 viste måde at gøre resultaterne dimensionsløse på er det opnået, at de gælder for alle værdier af træk- og trykstyrken.

For værdier af  $p$ , der gør ordinaten på figur 10.4.6 mindre end  $\sqrt{k/(k+1)}$ , her 0.4, består løsningen af en cirkelbue med centrum i  $(\frac{1}{2}, 0)$  og radius  $\frac{1}{2}$ , samt de deraf afledte ellipsebuer. Dette indses således: For  $r_2/r_1 = 1$  er der plan deformationstilstand, og løsningen kan f.eks. findes af (10.2.3), se figur 10.2.6. Med  $u = 0$  og  $v = \alpha$  fås heraf

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{P_1}{1} = \frac{f_c}{2}(1-(k-1)p) \sin 2\alpha \\ p &= \frac{P_2}{1} = \frac{f_c}{2}(1-(k+1)p - (1-(k-1)p) \cos 2\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (10.4.7)$$

Dette ses at fremstille en cirkel med centrum på abscisseaksen for værdien

$$p = \frac{f_c}{2}(1-(k+1)p) \quad \circ$$

$$\frac{p + f_t}{f_c - (k-1)f_t} = \frac{1}{2} \quad (10.4.8)$$

Et skæringspunkt med abscisseaksen fås for  $\alpha = 0$ :

$$p = -\frac{f_c}{2} \cdot 2p = -f_t \quad (10.4.9)$$

Cirklen går altså igennem origo og er lig med den omtalte cirkel. For værdien af  $r_2/r_1$ , større end 1 er  $p + f_t$  som før omvendt proportional med  $r_2/r_1$  for en fastholdt værdi af  $\tau_0$ . Løsningen kan derfor beskrives analytisk:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{(p+f_t)r_2}{(f_c - (k-1)f_t)r_1}} \quad (10.4.10)$$

$$\frac{\tau_0}{f_c - (k-1)f_t} = \sin \alpha \cos \alpha \quad (10.4.11)$$

Foruden den nu fundne korrekte løsning skal her til sammenligning omtales to øvreværdiløsninger.

I den første antages flytningerne  $u_r$  og  $u_z$  at være konstante overalt

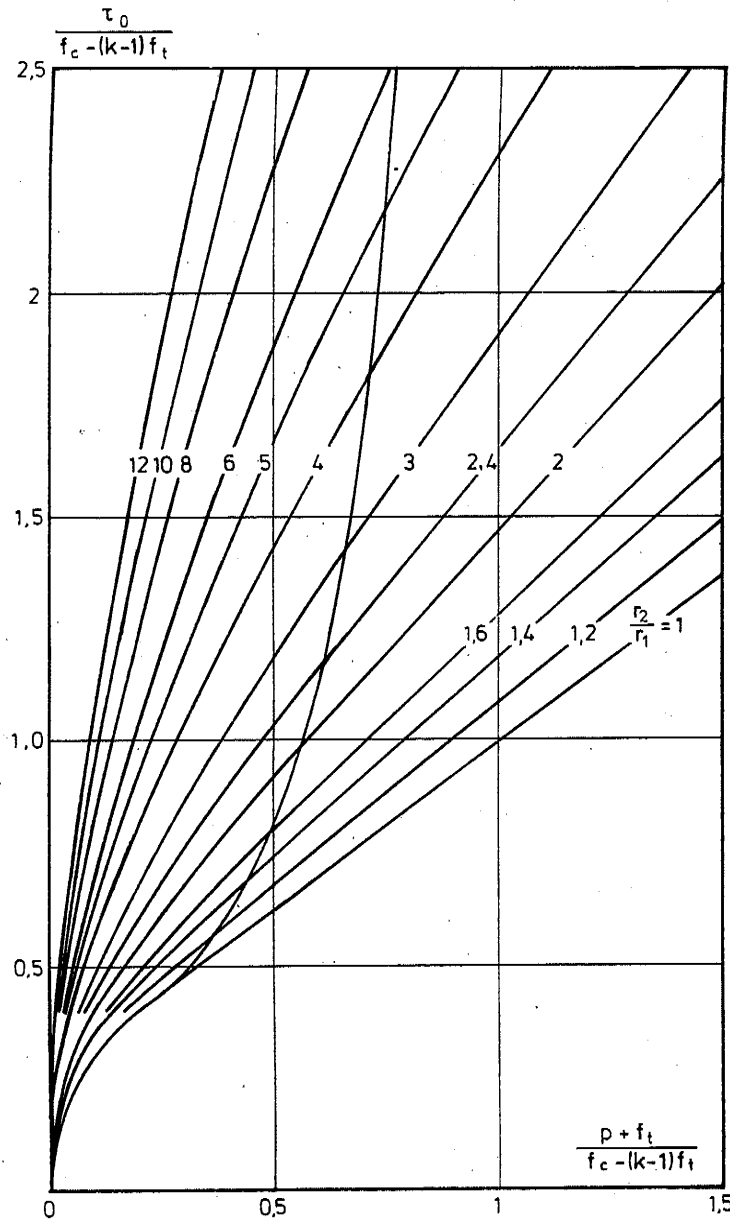
$$(u_r, u_z) = \delta(\sin v, \cos v), \quad \psi \leq v \leq \frac{\pi}{2} \quad (10.4.12)$$

Flytningerne er angivet i forhold til stangen i midten. Dissipationen og det ydre arbejde bliver

$$\begin{aligned} D &= \pi r_1 \text{ld}(f_c - (k-1)f_t - (f_c - (k+1)f_t) \sin v) \\ &\quad + 2\pi(r_2 - r_1) \text{ld} f_t \sin v \\ A_y &= 2\pi r_1 \text{ld} \tau_0 \cos v - 2\pi r_2 \text{ld} p \sin v \\ D &= A_y \Rightarrow \\ \tau_0 &= (f_c - (k-1)f_t) \frac{1 - \sin v}{2 \cos v} + (p + f_t) \frac{r_2}{r_1} \tan v \end{aligned} \quad (10.4.13)$$

Minimering af  $\tau$  med hensyn til  $v$  under overholdelse af begrænsningerne for  $v$  medfører

$$\frac{\tau_0}{f_c - (k-1)f_t} = \begin{cases} s \sqrt{1-s}, & s \leq \frac{1}{k+1} \\ \frac{1 + s(k-1)}{2\sqrt{k}}, & s \geq \frac{1}{k+1} \end{cases} \quad (10.4.14)$$



Figur 10.4.6 Bæreevnen ved en lang, rund forankring.  
Coulomb-materiale med begrænset trækstyrke.  
 $k = 4$  og  $\varphi = 36,9^\circ$ .

$$\sin \nu = \begin{cases} 1 - 2S & , \quad S \leq \frac{1}{k+1} \\ \frac{k-1}{k+1} = \sin \varphi, S \geq \frac{1}{k+1} \end{cases} \quad (10.4.15)$$

$$S = \frac{(p + f_t)r_2}{(f_c - (k-1)f_t)r_1} \quad (10.4.16)$$

Sammenlignet med den korrekte løsning giver dette altså den korrekte bæreevne for  $\tau_0/(f_c - (k-1)f_t) \leq \sqrt{k}/(k+1)$ , mens der herfra benyttes tangentlinjerne i stedet for de rigtige kurver. For et ret svagt modhold, samt for  $r_2/r_1 \approx 1$  er denne løsning altså ret god.

Den anden øvreværdiløsning forsøger at beskrive det tilfælde, hvor trækstyrken ikke har nogen indflydelse. Dette er opnået ved at gøre volumenudvidelsen (dilatationen) mindst mulig overalt. Som før har vi en flytningsdiskontinuitet af størrelsen  $\delta$  langs stangen, men nu bliver vinklen mellem flytningen og stangen mindst mulig, dvs. lig med  $\varphi$ . Der anvendes som før en konstant værdi af  $u_z$ , mens  $u_r$  kan variere.

$$u_z = \delta \cos \varphi; \quad u_r(r=r_1) = \delta \sin \varphi \quad (10.4.17)$$

$$u_r(r) > 0$$

$$\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} > 0, \quad \gamma_{rz} = 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_\theta + k \varepsilon_r = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{u_r}{r} + k \frac{du_r}{dr} = 0 \Rightarrow u_r = \delta \sin \varphi \left( \frac{r}{r_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \quad (10.4.18)$$

$$D = 2\pi r_1 l \delta f_c \left( \frac{1 - \sin \varphi}{2} + \frac{\sin \varphi}{k-1} \left( \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{1-\frac{1}{k}} - 1 \right) \right)$$

$$A_y = 2\pi r_1 l \delta (\tau_0 \cos \varphi - p \sin \varphi \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{1-\frac{1}{k}})$$

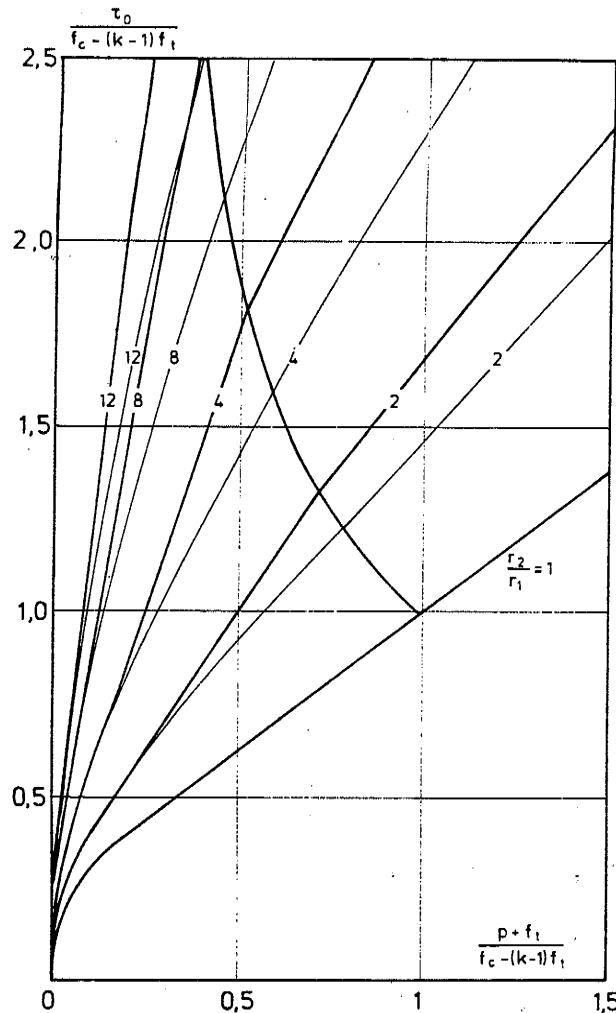
$$D = A_y \Rightarrow$$

$$\tau_0 = \frac{f_c}{2\sqrt{k}} + \left( \left( \frac{f_c}{k-1} + p \right) \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{1-\frac{1}{k}} - \frac{f_c}{k-1} \right) \frac{k-1}{2\sqrt{k}} \quad (10.4.19)$$



Løsningen, som er uafhængig af  $f_t$ , fremstilles af rette linjer gennem  $(p, t) = (-f_c/(k-1), 0)$ .

På figur 10.4.7 er de to øvre værdier vist, idet kun den mindste af dem er optegnet. Til sammenligning er også den korrekte løsning vist med tynde streger.



Figur 10.4.7 Lang forankring. To øvre værdier, (10.4.14) og (10.4.19), samt den korrekte løsning (med tynde streger).

### 10.5 Delvist ru jern

Indtil nu har der været forudsat en fuldstændig forbindelse mellem jern og beton, så et eventuelt brud her skete med betonens egen brudbetingelse. Dette ses i løsningen, f.eks. ved at sliplinjet på figur 10.4.3 har armeringsjernet som indhyllingskurve. Hvis der er en dårligere forbindelse end dette, gælder løsningen ikke længere. Man må da i stedet tage udgangspunkt i de spændinger, der kan overføres og opbygge løsningen ud fra dette.

Hvis flydebetingelsen langs jernet stadig er en Coulomb-betingelse, med adhæsionen  $a$  og friktionsvinklen  $\varphi_a$ , og det gælder, at

$$\frac{a}{c} = \frac{\tan \varphi_a}{\tan \varphi} \quad (10.5.1)$$

dvs. hvis de to flydebetingelser er proportionale, kan løsningen på figur 10.4.3 stadig anvendes. Jernet har nu bare ikke længere radius  $r_1$ , men en større værdi  $r_v$ , for hvilken det gælder, jvf. (5.11.1), at

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_a}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin \varphi_a}{\sin \varphi} \quad (10.5.2)$$

Sliplinjefeltet benyttes nu kun for større værdier af  $r$  end  $r_v$ . Herved fås netop flydning også i fladen langs jernets overflade. Resultatet bliver, at forankringens bæreevne bliver den samme som bæreevnen af et fuldstændigt forbundet jern med den ækvivalente radius  $r_1$ , som er mindre end den virkelige radius  $r_v$ . For forskellige værdier af  $\varphi_a$  kan den således fundne fiktive radius aflæses af tabel 10.5.1.

$\varphi_a$	$\frac{r_1}{r_v}$
36,9	1
35	0,88
30	0,56
25	0,30
20	0,14
15	0,048
10	0,011
5	0,00094

Tabel 10.5.1 Ækvivalent ru-jerns-radius for delvist ru jern.

Når man har fundet bæreevnen af den delvist ru forankring, som beskrevet ovenfor, kan man finde de spændinger, der virker på den virkelige stangs overflade. Dette gøres ved på figur 10.4.6 for samme værdi af  $\tau_0$  at finde den værdi af  $p$ , der svarer til det virkelige forhold  $r_2/r_v$ .  $\tau$  er naturligvis altid omvendt proportional med  $r$ . Hvis punktet på figur 10.4.6 ligger til venstre for grænsekurven, er der trækflydning i betonen hele vejen fra jernet ud til modholdet. Flydebetingelsen langs det delvist ru jern er nu ikke opfyldt, og der er derfor fundet en nedreværdi for bæreevnen. Beregningen kan dog i dette tilfælde foretages ganske simpelt:

Da  $p + f_t$  er omvendt proportional med  $r$ , kan trykket  $p_0$  på stangen beregnes

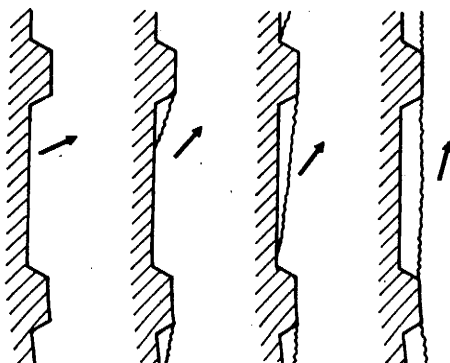
$$p_0 = (p + f_t) \frac{r_2}{r_v} - f_t \quad (10.5.3)$$

Med denne værdi kan nu den værdi af  $\tau_0$  opsøges, der netop giver flydning langs røret.

$$\tau_0 = a + p_0 \tan \phi_a \quad (10.5.4)$$

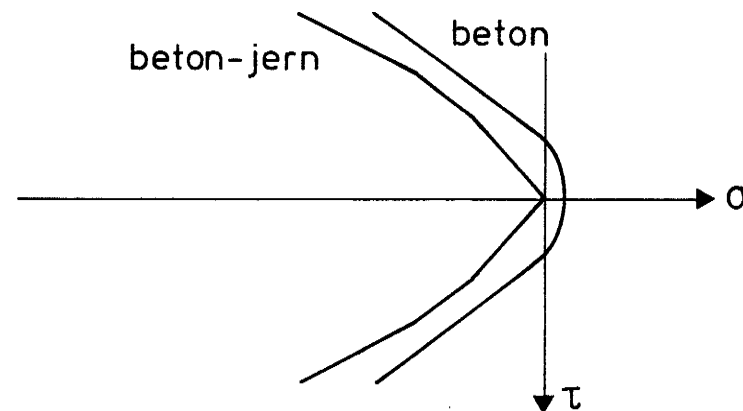
Hermed er bæreevnen fundet.

For jern med kamme eller ribber afhænger mulighederne for kraft-overførsel naturligvis af kammenes udformning. Dette er blevet studeret af Uwe Hess i [79.3] ved hjælp af øvreværdimekanismer, som vist på figur 10.5.1.



Figur 10.5.1 Flydemekanismer ved kamme.

Der er ikke regnet med nogen vedhæftning mellem jern og beton; bæreevnen skyldes derfor udelukkende de geometriske bånd, som forkamningen lægger på flytningerne, og de deraf følgende brud i betonen. Ved hjælp af mekanismer som de på figur 10.5.1 viste kan man finde en øvreværdiflydeflade for overgangen mellem jern og beton, se fig. 10.5.2. De tilsvarende nedreværdier er ikke fundet og ligger formodentlig også i visse tilfælde en hel del lavere. Betonens trækstyrke kan meget vel få betydning i flere af mekanismerne.



Figur 10.5.2 Flydeflade for beton og øvreværdiflydeflade for overgangen mellem jern og beton. Princip.

På grund af det meget varierende spændingsforløb, der må komme omkring kammene, og den store indflydelse, som små ændringer af kammenes ret stiliserede geometri formentlig vil få på bæreevnen, er det illusorisk at regne med hele kammenes geometri. Det vil derfor være rimeligt at forsøge at finde en simplificeret beskrivelse af flydebetingelsen langs jernet. Dette kunne være en reduceret udgave af betonens flydebetingelse som (10.5.1). Reduktionen bliver så en slags forankringsfaktor som størrelsen  $\zeta$  i betonnormen.

### 10.6 Sammenligning med DS 411

I den danske betonnorm [73.3] findes der for ribbestål følgende krav til forankringslængden l:

$$\left. \begin{aligned} l &\geq \frac{0,09}{\zeta} \frac{f_y}{f_t} d \\ l &\geq \frac{30}{\zeta} d \end{aligned} \right\} \quad (10.6.1)$$

Styrkerne  $f_y$  og  $f_t$  er de karakteristiske værdier af stålets flydespænding og betonens trækstyrke, og  $\zeta$  er den såkaldte forankringsfaktor. Den bestemmes ved forsøg og er definitions-mæssigt lig med 1 for en bestemt type gevindstang. Ifølge vejledningen er  $\zeta = 0,9$  for dansk kamstål og 0,8 for dansk tentorstål. Af (10.6.1) fås forskydningsspændingen

$$\frac{\tau_o}{f_t} = \frac{\zeta}{0,36} \min \left\{ 1, 0,003 \frac{f_y}{f_t} \right\} \quad (10.6.2)$$

For sammenligningen med det foregående sættes  $\zeta = 1$  svarende til, at flydebetingelsen mellem beton og jern er mindst lige så stærk som betonens indre flydebetingelse. I det følgende betragtes kun det tilfælde, hvor  $0,003 f_y \geq f_t$ . Hermed fås:

$$\tau_o = \frac{f_t}{0,36} \quad (10.6.3)$$

Da denne værdi altid i praksis vil være mindre end  $0,4 f_c$ , kan forankringens bæreevne vurderes ved hjælp af formlerne (10.4.1) og (10.4.2). Der er anvendt den i normens tabel 3.2 givne sammenhæng mellem betonens træk- og trykstyrke. Denne svarer til den empiriske formel

$$\frac{f_t}{1 \text{ MPa}} = \sqrt{\frac{f_c}{10 \text{ MPa}}} \quad (10.6.4)$$

Hvis  $\tau_o$  beregnes af (10.4.1-2) med  $r_2/r_1 = 1$ , vil man finde, at denne værdi for alle betonstyrker større end 10 MPa overstiger den ifølge (10.6.3) beregnede værdi. Der behøves altså i disse tilfælde intet modhold for at overføre forskydningsspændingerne til betonen.

Hvis der antages et dæklag over jernet af samme tykkelse som jernet, kan modholdet på den sikre side modelleres som en kappe med  $r_2/r_1 = 3$ . Hvis der i hele trykstyrkeintervallet 5 - 50 MPa indsættes en trækstyrke på 0,3 MPa i (10.4.1), fås værdier af  $\tau_o$ , som svarer udmærket til (10.6.3) med værdier ifølge (10.6.4).

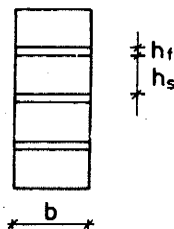
Det er altså muligt at bringe overensstemmelse mellem beton-normens forankringsformel og den udledte forankringsmodel, hvis dæklaget antages at yde et modhold, som svarer til en kappe med samme tykkelse som armeringsstangens diameter og med den plastiske trækstyrke 0,3 MPa. Denne styrke er dog væsentlig lavere end den værdi, betonnormen angiver (10.6.4).

Betonnormen er således konservativ i forhold til den plastiske model.

## 11. Murværk

### 11.1 Indledning

Murværk består af mursten og mørtel, dvs. to materialer med forskellige styrker. Det mures i forskellige typer forbandt, men her skal kun betragtes

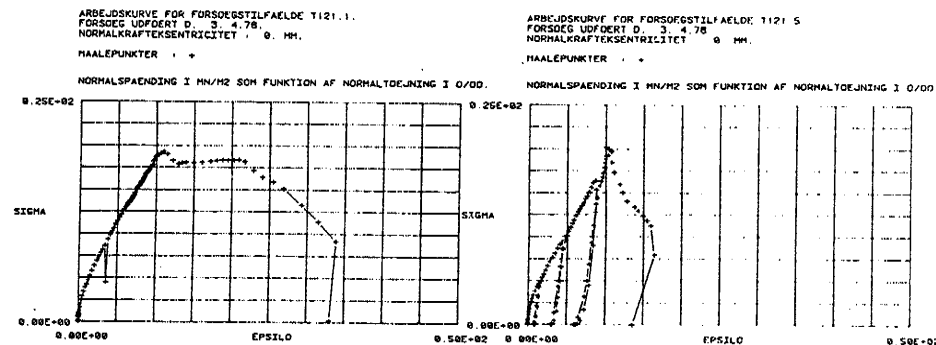


Figur 11.1.1 Tværsnit af mur.

en halvstensmur, hvis lodrette tværsnit er vist på figur 11.1.1. Der forudsættes plan deformationstilstand i den viste plan. Der søges bæreevnen ved central, lodret belastning af muren.

Da stenene oftest er stærkere end mørtlen, vil mørtlen begynde at flyde, før stenenes styrke er nået. Ved den heraf følgende udadgående bevægelse af mørtlen i fugerne opbygges forskydningsspændingen i de vandrette grænseflader mellem de to materialer. Herved opstår et tryk i lodrette snit i fugen, som forøger fugens bæreevne. Man kan sige, at stenen armerer fugen. Samtidig med dette tryk opstår et træk i lodrette snit i stenene, og når dette træk kombineret med det lodrette tryk når stenenes brudværdi, er bæreevnen udtømt. Ved forsøg ses også ofte, at massive sten flækker i tynde flager, der efter forsøget bogstaveligt talt må fejles op.

Det faktum, at der opstår vandret tryk i fugen og træk i stenen, ses af og til forklaret i litteraturen ved de forskellige værdier af Poissons forhold for sten og mørtel, se f.eks. [59.1], [65.1] og [80.1]. Da værdien er størst i mørtlen, skulle det give den største tværudvidelse her og dermed trykket i mørtlen og trækket i stenen.



Figur 11.1.2 Arbejdskurver for trykforsøg fra [79.1].

Dette har dog formentlig ingen indflydelse på forholdene nær den maksimale last på muren. Dette ses bl.a. af, at arbejds-kurven for trykforsøget kun indeholder et ganske kort lineær-elastisk stykke, hvorefter der følger et langt, næsten lineært stykke, hvor stenen stadig er elastisk, mens større og større dele af fugen flyder, og spændingerne omlejres henimod den plastiske løsning, se figur 11.1.2, som er fra [79.1].

### 11.2 En simpel øvre værdi

Det forudsættes, at både sten og mørtel er plastiske materialer med Coulombs modificerede flydebetingelse og hvert sit sæt styrkeparametre,  $\varphi_s$ ,  $f_{cs}$ ,  $f_{ts}$  og  $\varphi_f$ ,  $f_{cf}$  og  $f_{tf}$  for henholdsvis sten og fuge. Murens bredde kaldes  $b$  og højden af sten og fuge henholdsvis  $h_s$  og  $h_f$ .  $k_s$  og  $k_f$  indføres ved hjælp af (3.3). Det forudsættes, at der er en fuldstændig vedhæftning mellem sten og fuge, så evt. flydning her sker med det svageste materiales flydebetingelse. Murens egenvægt negligeres.

Idet trykket på muren kaldes  $p$ , skal der her findes to øvre værdiløsninger med homogene tøjningstilstande i hvert materiale. I begge tilfælde haves en fælles værdi af den vandrette hovedtøjning  $\varepsilon_1 > 0$ .

I den første øvre værdi ønskes ren trækflydning i stenen, hvis anden hovedtøjning da bliver nul. I fugen bliver anden hovedtøjning

$$\varepsilon_{2f} = -\frac{\varepsilon_1}{k_f}$$

Dissipationen for en sten og en fuge bliver da

$$D = bh_s f_{ts} \varepsilon_1 + bh_f f_{cf} \frac{\varepsilon_1}{k_f}$$

Det ydre arbejde bliver

$$A_Y = p \cdot b \cdot \frac{h_f}{k_f} \varepsilon_1$$

Øvreværdisætningen giver

$$D = A_Y \Rightarrow$$

$$p = f_{cf} + \frac{h_s k_f}{h_f} f_{ts} \quad (11.2.1)$$

I den anden øvreværdi sker der yderligere en sammentrykning af stenen, hvis lodrette hovedtøjning bliver

$$\varepsilon_{2s} = - \frac{\varepsilon_1}{k_s}$$

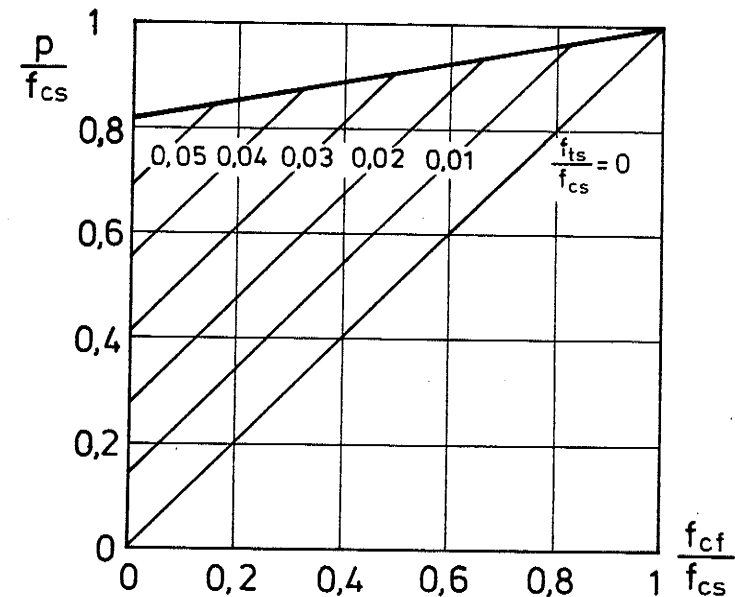
Vi får

$$D = bh_s f_{cs} \frac{\varepsilon_1}{k_s} + bh_f f_{cf} \frac{\varepsilon_1}{k_f}$$

$$A_Y = p \cdot b \left( \frac{h_f}{k_f} + \frac{h_s}{k_s} \right) \varepsilon_1 \Rightarrow$$

$$p = \frac{\frac{h_s}{k_s} f_{cs} + \frac{h_f}{k_f} f_{cf}}{\frac{h_s}{k_s} + \frac{h_f}{k_f}} \quad (11.2.2)$$

Man skal naturligvis vælge den mindste af værdierne fra (11.2.1) og (11.2.2). Formel (11.2.1) udtrykker tydeligt, at fugen er blevet armeret af stenen, idet den udover fugens trykstyrke indeholder et led, som er proportionalt med stenens trækstyrke. I formel (11.2.2) er p et vægtet gennemsnit af de to materialers trykstyrker. Der er imidlertid tale om det samme fænomen, blot skal trækstyrken måles ved det aktuelle trykniveau p, og den er her afhængig af p. Resultatet fremgår af figur 11.2.1, hvor højderne svarer til almindelige danske mursten, og der er indsat  $\psi_s = \psi_f = 30^\circ$ .



Figur 11.2.1 Øvreværdien for bæreevne af murværk  
 $h_s = 55 \text{ mm}$ ,  $h_f = 12 \text{ mm}$ ,  $k_s \approx k_f = 3$ .

### 11.3 Forankring af fugen. Nedreværdi

Øvreværdien er imidlertid ikke en korrekt løsning. Muren er nemlig ikke påvirket af et træk på siden af stenene og et tryk på fugerne. Disse kræfter skal overføres mellem sten og fuge ved enderne af fugen. Stenen skal med andre ord forankres i fugen. Hvor lang en forankringszone behøves hertil?

Til besvarelse af dette kan anvendes det passive cykloidefelt, som er omtalt i kapitel 5.5. I dette felt overføres den maksimale mulige kraft mellem sten og fuge. Løsningen er skitseret på figur 11.3.1. Til højre for HIJ have den spændingstilstand, som blev beregnet tidligere i dette kapitel, dvs. med et tryk p på vandrette snit, som er den mindste af værdierne angivet af (11.2.1) og (11.2.2). I områderne CEGHFD er alle sliplinjerne cykloidebuer. ABC er en Rankinezone med den vandrette hovedspænding nul og den lodrette lig med trykstyrken af fugen. ACD og FHI er overgangszoner bestemt af deres nabozoner og med henholdsvis rette b-linjer og a-linjer.

Til beskrivelse af spændingerne indlægges en x-akse med begyndelsespunkt i C og gennem H. Afstanden mellem C og H kaldes  $b_2$ .

I C skal gælde

$$s = \frac{1}{2} f_{cf} = c_f \frac{1 + \sin \varphi_f}{\cos \varphi_f}$$

$$\theta = 0$$

Dette indsættes i (5.5.3), hvorefter  $c_2$  kan bestemmes, og vi får

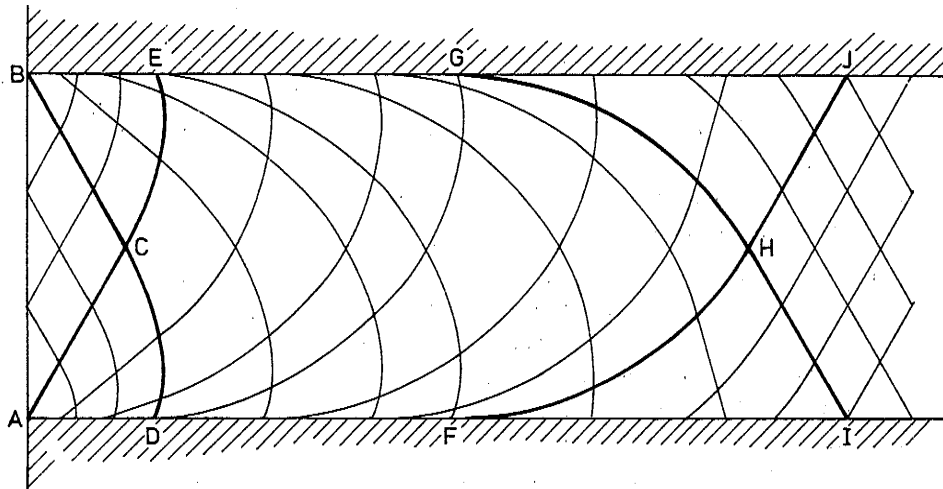
$$s = c_f \cot \varphi_f \left( \frac{1}{1 - \sin \varphi_f} e^{\frac{\sin \varphi_f}{\cos^2 \varphi_f} \frac{x}{c_o}} - 1 \right) \quad (11.3.1)$$

Det lodrette tryk langs x-aksen er jvf. (5.1.3)

$$p_1 = s(1 + \sin \varphi_f) + c_f \cos \varphi_f$$

Ved hjælp af (11.3.1) fås således

$$p_1 = c_f \cot \varphi_f \frac{1 + \sin \varphi_f}{1 - \sin \varphi_f} e^{\frac{\sin \varphi_f}{\cos^2 \varphi_f} \frac{x}{c_o}} + c_f \cos \varphi_f \left( -\frac{1 + \sin \varphi_f}{\sin \varphi_f} + 1 \right) =$$



Figur 11.3.1 Sliplinjefelt for forankring i fugen.  
Nedreværdiløsning.

$$p_1 = \frac{f_{cf}}{k_f - 1} (k_f e^{\frac{\sin \varphi_f}{\cos^2 \varphi_f} \frac{x}{c_o}} - 1) \quad (11.3.2)$$

Før  $x = b_2$  er  $p_1 = p$ , og da  $c_o$  er givet i (5.5.6), kan  $b_2$  findes

$$b_2 = \frac{c_o \cos^2 \varphi_f}{\sin \varphi_f} \ln \left( \frac{p(k_f - 1)}{f_{cf} k_f} + \frac{1}{k_f} \right) = \frac{2h_f}{\tan \varphi_f (1 + (\varphi_f + \frac{\pi}{2}) \tan \varphi_f)} \ln \left( \frac{p(k_f - 1)}{f_{cf} k_f} + \frac{1}{k_f} \right) \quad (11.3.3)$$

Den lodrette kraft, der overføres på CH, kan nu beregnes

$$K_2 = \int_0^{b_2} p_1 dx = \frac{c_o \cos^2 \varphi_f}{\sin \varphi_f} (p - f_{cf}) - \frac{b_2 f_{cf}}{k_f - 1} = \frac{2h_f}{\tan \varphi_f (1 + (\varphi_f + \frac{\pi}{2}) \tan \varphi_f)} \left( p - f_{cf} - \frac{f_{cf}}{k_f - 1} \ln \left( \frac{p(k_f - 1)}{f_{cf} k_f} + \frac{1}{k_f} \right) \right) \quad (11.3.4)$$

Den kraft, der overføres langs AC er

$$K_3 = \frac{h_f f_{cf}}{2\sqrt{k_f}} \quad (11.3.5)$$

Restbredden for den midterste zone med det konstante tryk  $p$  er

$$b_1 = b - \frac{h_f}{\sqrt{k_f}} - \frac{4h_f}{\tan \varphi_f (1 + (\varphi_f + \frac{\pi}{2}) \tan \varphi_f)} \ln \left( \frac{p(k_f - 1)}{f_{cf} k_f} + \frac{1}{k_f} \right) \quad (11.3.6)$$

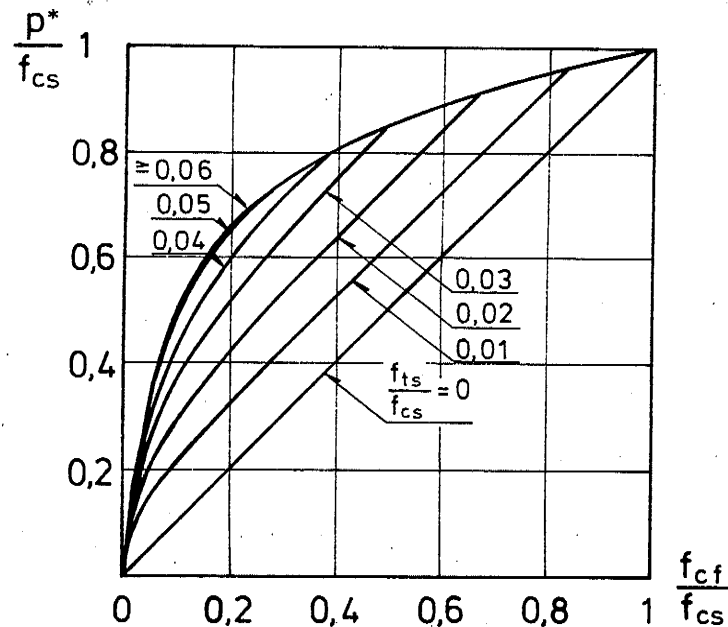
og kraften på dette stykke er derfor

$$K_1 = b_1 p \quad (11.3.7)$$

Den totale overførte kraft kan beskrives ved en middelspænding  $p^*$  over hele bredden  $b$

$$\begin{aligned}
 p^* &= \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3}{b} \\
 &= p - (p - f_{cf}) \frac{h_f}{b\sqrt{k_f}} \\
 &\quad - \frac{4h_f}{b \tan\psi_f (1 + (\psi_f + \frac{\pi}{2}) \tan\psi_f)} \left( (p + \frac{f_{cf}}{k_f - 1}) \ln \left( \frac{p(k_f - 1)}{f_{cf}k_f} + \frac{1}{k_f} \right) \right. \\
 &\quad \left. - (p - f_{cf}) \right) \quad (11.3.8)
 \end{aligned}$$

Med denne formel samt (11.2.1) og (11.2.2) til beregning af  $p$  fås de på figur 11.3.2 viste værdier af  $p^*$ .



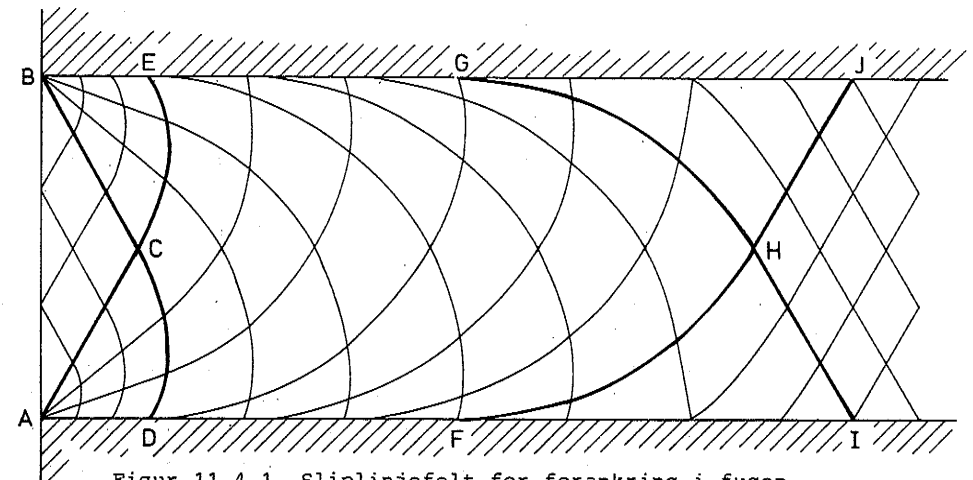
Figur 11.3.2 Bæreevne af murværk.

$h_s = 55 \text{ mm}$ ,  $h_f = 12 \text{ mm}$ ,  $b = 108 \text{ mm}$ ,  $k_s = k_f = 3$ .

#### 11.4 Forankring af fugen. Korrekt løsning

Det på figur 11.3.1 viste sliplinjefelt repræsenterer som nævnt en løsning, for hvilken der kan angives en statisk tilladelig spændingsfordeling overalt i fugen. Løsningen kan behandles analytisk. Der svarer imidlertid ikke et sæt af flytninger til den. Hele området ADFHGE skal nemlig kunne deformeres under sammenpresning af stenene. Dette er ikke muligt, da AD og BE ikke er flydelinjer. For at muliggøre udpresningen af fugen skal dens begrænsningslinjer være flydelinjer eller være indhyllingskurver for flydelinjer.

Den løsning, der korrigerer denne fejl, er vist på figur 11.4.1. Her er ABC en Rankinezone med enakset tryk. ADC og BEC er Prandtl-zoner med centervinkler  $\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}$ . I område DFHGE er spændingerne fundet af spændingerne langs DCE samt betingelserne, at sliplinjerne skal tangere DF og EG. Ved H nås den i forvejen bestemte værdi af trykket i det indre af stenen, og feltet til højre for HI er et Rankine-felt. FIH og GJH er felter, som er bestemt af sliplinjerne HF og HI, henholdsvis HG og HJ. Kurverne CD og CE er logaritmiske spiraler, men jo længere afstanden  $|CH|$  er, jo bedre vil



Figur 11.4.1 Sliplinjefelt for forankring i fugen.

Korrekt løsning.

sliplinjerne i områdets højre ende tilnærme cykloidebuer. Cykloidebuen er faktisk grænseformen for sliplinjerne, når afstanden  $|CH|$  går mod uendelig.

Forskellen mellem de to løsninger, figur 11.3.1 og 11.4.1 kan udtrykkes ved, at cykloideløsningen kræver en længere randzone for at opbygge trykket ved H end den rigtige løsning. På figurerne er friktionsvinklen  $\varphi = 30^\circ$ , og med denne vinkel er længdeforskellen 0.106 gange fugens højde.

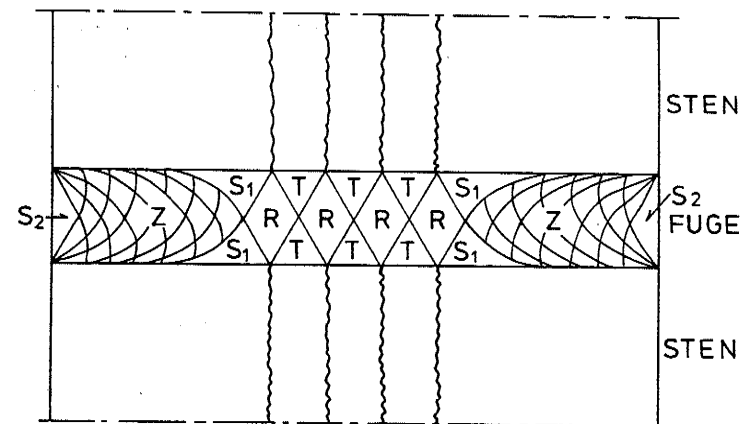
Den nu fundne løsning er den korrekte under to forudsætninger.

Den ene er, at stenens virkemåde kan udtrykkes ved, at den med hele sin trækstyrke armerer fugen, dvs. at den virker som et en-dimensionalt legeme. Trækstyrken kan ganske vist afhænge af trykket på stenen, som det allerede er nævnt. Hvorvidt denne forudsætning er opfyldt, behandles senere.

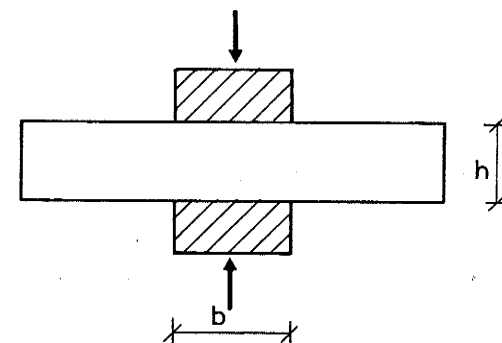
Den anden forudsætning er, at den indre Rankinezone af sliplinjerne opdeles i et helt antal rhomber, hvis vandrette diagonaler ligger på fugens symmetrilinje, og hvis lodrette diagonaler er fugens højde, samt de mellemliggende ligebenede trækanter, se figur 11.4.2.

Ved mekanismen vil der opstå lodrette trækflydelinjer i stenene ved rhombernes spidsvinklede hjørner. De derimellem liggende stendele vil bevæges lodret sammen med de trekantede fugedele T, så trekanterne bevæges parvis mod hinanden. Rhomberne R vil herved bevæges fra hinanden. De fire overgangsområder  $S_1$  vil translateres parvis mod hinanden uden deformation. I områderne Z er der tøjninger forskellige fra nul overalt, idet fugen presses ud. De to yderste Rankineområder  $S_2$  presses også ud, men uden deformation.

Hvis den indre Rankinezone ikke kan opdeles i et helt antal rhomber R og trekanter T, er denne mekanisme ikke mulig, og bæreevnen er højere. Det noget simplere, analoge problem at finde bæreevnen af et udstrakt lag med højden  $h$  af Coulombmateriale mellem to glatte plader med bredden  $b$  for alle værdier af  $b/h$ , se figur 11.4.3, er behandlet af Green i [51.1]. I mekanismen, som er et kompliceret samspil af ligevægtsligninger og kompatibilitetsbetingelser, indgår både stive legemer, flytningsdiskontinuitetskurver og zonebrud. Green undersøger kun Tresca-materiale ( $\varphi = 0$ ) og finder, at den gennemsnitlige spænding højst kan blive 4% højere end svarende til den homogene spændingsfordeling. Denne fejl fås for  $b/h = \sqrt{2}$ . For stigende værdier af  $b/h$  varierer fejlen mellem 0 og en øvre grænse, som aftager mod nul. Selv om tallet formodentlig bliver større for et Coulombmateriale med f.eks.  $\varphi = 30^\circ$ , som tillader større spændingsvariationer, gøres der dog kun en ubetydelig fejl ved at negligere dette fænomen.



Figur 11.4.2 Flydemekanisme i fuge med trækflydning af stenen.



Figur 11.4.3 Coulombmateriale sammenpresset mellem to glatte, stærke flader.

I mekanismen på figur 11.4.1 sker der ren trækflydning i stenen, koncentreret i nogle lodrette trækflydelinjer. Dette fås i de tilfælde, hvor trykket  $p$  i det indre af fugen er bestemt af formel (11.2.1). Hvis imidlertid  $p$  er givet af formel (11.2.2), bliver mekanismen noget anderledes, se figur 11.4.4.

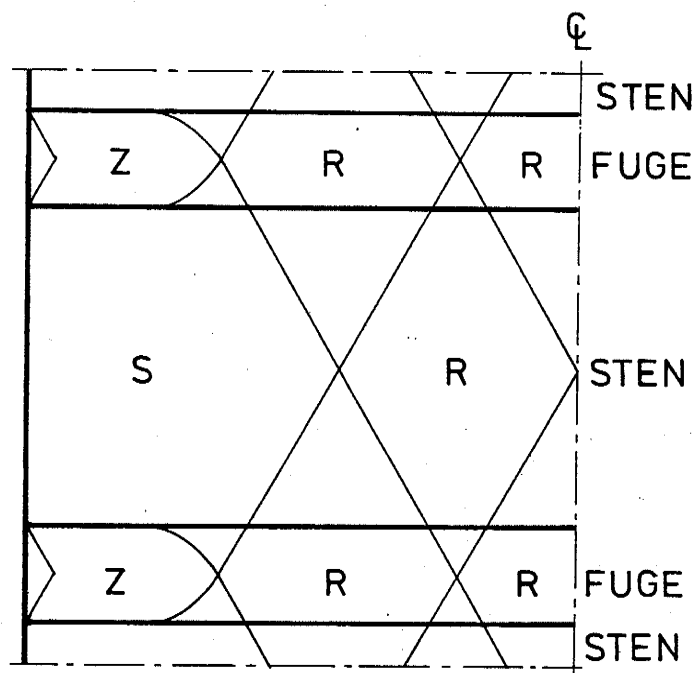
De yderste dele af stenen  $S$  er stadig udeformerede, og sammentrykningen må her klares af zonen  $Z$  i fugen. Resten af stenen og fugen opdeles i rhomber  $R$ , hvis højde nu er højden af fugen plus højden af stenen. (Hvis stenen og fugen ikke har samme friktionsvinkel, får rhombernes sider dog et knæk ved passage fra fuge til sten,



og rhomberne bliver til ottekanter). Disse rhomber kiler sig ind mellem hinanden, hvorved muren trykkes sammen lodret og forlænges vandret. Også her gælder det, at geometrien egentlig skal gå op, så der bliver et helt antal rhomber; men dette fænomen negligeres af de samme grunde som før.

#### 11.5 Forankring af stenen

Idet forholdene i fugen hermed er grundigt behandlet, skal stenens forhold nu undersøges nærmere. Indtil nu er det antaget, at stenen har en vis flydetrækkraft, som afhænger af det tryk, den udsættes for. Hvis det totale træk i et lodret snit i stenen har nået denne værdi, kan der ske forlængelser af denne, ellers ikke. Dette forudsætter, at der kan etableres sådanne spændingsfordelinger i stenen, så trækspændingerne kan blive jævnt fordelt over de lodrette snit, som flyder.



Figur 11.4.4 Mekanisme med sammentrykning også af stenen.

Hvis fugen er relativt stærk eller lav, er den forankringslængde, fugen behøver, ret kort i forhold til stenens højde. Der vil da kunne forekomme et kompliceret samspil af forankringsproblemer i stenen og fugen med meget forskellige bevægelser og brudlinjeforløb.

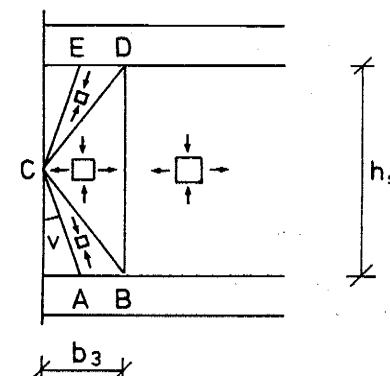
I den følgende nedreværdiløsning for stenens forankringsproblem betragtes først kun spændingerne i stenen, se figur 11.5.1. Til højre for BD er hovedspændingerne lodrette og vandrette med et vandret træk  $f_t$  og et lodret tryk  $p$ , som er fundet af (11.2.1) eller (11.2.2). I trekantområdet BCD er de samme hovedspændingsretninger og den samme vandrette hovedspænding, men den lodrette hovedspænding kan have en anden værdi,  $p_0$ . I trekantområderne ABC og CDE er et enakset tryk med størrelsen  $f_{cs}$  parallelt med henholdsvis AC og CE. Til venstre for AC og CE er stenen spændingsfri.

Med disse spændinger givet kan ligevægtsligningerne opstilles og løses, hvorved geometrien fastlægges. Den nødvendige bredde  $b_3$  er

$$b_3 = \frac{h_s}{2} \sqrt{\frac{f_t(f_t + f_{cs})}{p_0(f_{cs} - p_0)}} \quad (11.5.1)$$

Den viste trykhældningsvinkel  $v$  er givet ved

$$\tan v = \frac{f_t \cdot h_s}{2p_0 b_3} \quad (11.5.2)$$



Figur 11.5.1 Forankring i stenen, nedreværdiløsning.

Tabet i bæreevne som følge af forankringen er

$$b_3 p_0 - b_3 p = \frac{h_s}{2} \sqrt{\frac{(f_t + f_{cs}) f_t}{(f_{cs} - p_0) p_0}} (p - p_0)$$

Da både  $p$  og  $p_0$  er mindre end  $f_{cs}$ , fås det mindste tab ved at vælge  $p_0$  så stor som mulig; det vil sige

$$p_0 = \max \{p, f_{cs} - k_s f_{ts}\}$$

Herved bliver tabet enten nul eller negativt. Dette er løsningen, når kun spændingerne i stenen betragtes.

Med denne løsning fås imidlertid en lodret middelspænding i den del af fugen, som ligger til venstre for D, som er større end eller lig med spændingen i det indre af fugen. Dette er ikke muligt, da spændingen i fugen vokser op fra mørtlens enaksede trykstyrke ved kanten til værdien  $p$  i det indre. Spændingen kan ikke overskride  $p$ , da denne værdi er bestemt som den, der også giver trækbrud i stenen. En realistisk løsning af stenens forankringsproblem involverer altså også fugens forankringsspændinger. Fra kapitel 11.3 fås den lodrette kraft  $P$ , som overføres ved fugens forankring

$$P = K_2 + K_3 + \frac{p h_f}{2\sqrt{k_f}}$$

Her antages som en tilnærmelse den samme middelspænding, dvs.

$$p_0 = \frac{P}{b_2 + \frac{h_f}{\sqrt{k_f}}} \quad (11.5.3)$$

Af (11.5.1) kan  $b_3$  nu findes.

Denne bredde sammenlignes med den på figur 11.3.1 viste afstand AI. Hvis  $b_3$  er større end denne, dvs. hvis

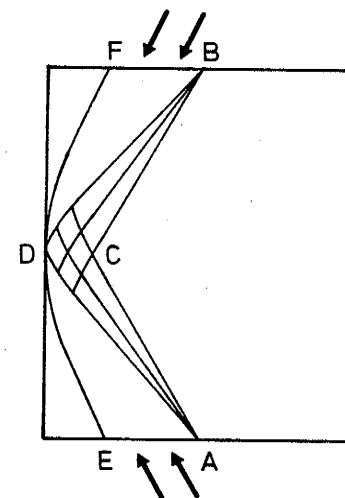
$$b_3 > b_2 + \frac{h_f}{\sqrt{k_f}} \quad (11.5.4)$$

reduceres bæreevnen  $p^*$  fra formel (11.3.7) til  $p^{**}$ :

$$p^{**} = p^* - \frac{2}{b} (p - p_0) (b_3 - b_2 - h_f \frac{1}{\sqrt{k_f}}) \quad (11.5.5)$$

For almindelige mursten ( $h_s = 55$  mm,  $b = 108$  mm og  $h_f = 12$  mm) er stenforankringsproblemet dog ikke aktuelt; (11.5.4) bliver ikke opfyldt, hvis fugens trykstyrke er under 80% af stenens.

I de tilfælde, hvor (11.5.4) bliver opfyldt, er reduktionen fra  $p^*$  til  $p^{**}$  ubetydelig, så figur 11.3.2 gælder også med hensyntagen til stenforankringsbruddet.

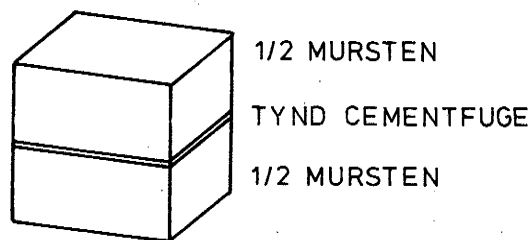


Figur 11.5.2 Forankring i stenen, korrekt løsning.

Den tilsvarende korrekte løsning ses på figur 11.5.2. Til højre for ACB er spændingerne som i det indre af stenen. A og B er poler for to logaritmiske spiraler gennem C. I udfyldningszonen mellem disse ligger D, lige langt fra A og B, og med enakset lodret tryk  $f_{cs}$ . D angiver nu det yderste nødvendige punkt i stenen, idet der findes en kurve EDF, til venstre for hvilken stenen kan antages spændingsløs.

## 11.6 Materialernes styrkeparametre

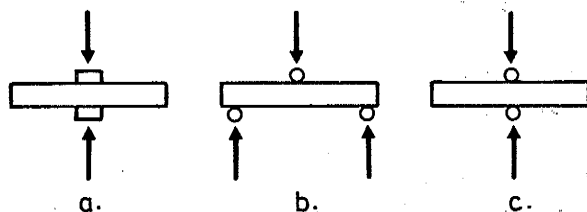
Styrkerne af murværkets enkelte komponenter bestemmes ved standardiserede forsøg. Et murstensprøvelegeme består af to halve mursten muret ovenpå hinanden med en tynd cementfuge imellem, se figur 11.6.1. Prøvningen sker ved lodret sammenpresning i en prøvemaskine.



Figur 11.6.1 Standard-murstensprøvelegeme.

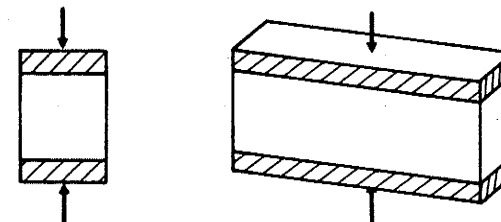
Da fugen er smal, og hvis dens styrke ikke ligger langt fra stenens styrke, vil den ikke ændre denne meget. Selve prøvelegemets geometri kan dog godt betyde noget for den aflæste styrke. Dets form er nemlig omtrent kubisk, og den heraf fundne "terningsstyrke" ligger noget højere end "cylinderstyrken" målt på cirkulære cylindre med en højde på 2 gange diameteren. For beton anvendes ofte en faktor 1.25 mellem de to styrker. Dette er nærmere belyst i kapitel 7. Mens der skal tre parametre til at beskrive styrken af et Coulombmateriale, måles der kun en størrelse ved forsøget. En væsentlig forskel på massive sten og hulsten kunne være deres trækstyrke, men denne måles ikke.

Mørtlens styrke måles på 2 x 2 x 12 cm prøvelegemer lagret mellem træpapir på en måde, som tilstræber en vandsugning ligesom den, stenen udøver på mørtlen. Der kan laves både tryk-, bøjnings- og spaltningsforsøg med disse stænger, se figur 11.6.2.



Figur 11.6.2 Mørtelprøvningsforsøg.

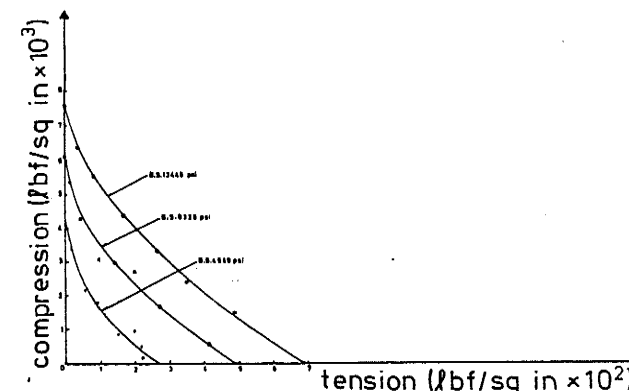
For trykforsøgene gælder, at styrken må være mindst som terningsstyrken. Teoretisk set må styrken være mindst lige så stor som



Figur 11.6.3 Teoretisk prøvelegeme til vurdering af mørtelstyrken.

styrken af et langt prisme med kvadratisk tværsnit belastet langs hele den ene side, se figur 11.6.3., da de ubelastede ender på figur 11.6.2a muligvis kan gøre en vis modstand mod sammentrykningen. Ifølge kapitel 7 er denne styrke 1.7 gange den enaksede trykstyrke for et Coulombmateriale med en friktionsvinkel på  $37^\circ$ .

Friktionsvinklerne for materialerne måles normalt ikke. I [73.1] er dog refereret nogle forsøg til måling af styrkerne af sten og mørtel ved fleraksede spændingstilstande. Forfatterne til artiklen finder konkave brudkurver i

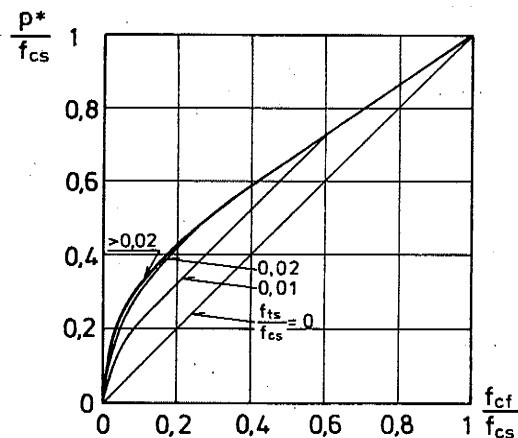


Figur 11.6.4 Toaksede træk-tryk-brudbetingelser for modelmursten fra [73.1].

træk-trykområdet, se figur 11.6.4. Trækstyrken er ca. 0,05 - 0,1 gange trykstyrken, og denne værdi synes at vokse med trykstyrken, modsat af hvad der gælder for beton.

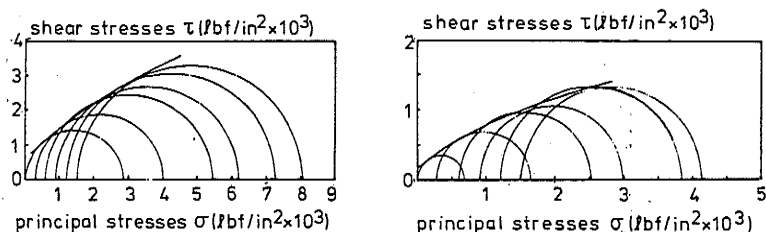
Hvis kurverne, og specielt deres øverste del, som er mest relevant her, skal tilnærmes med rette linjer gennem den enaksede trykstyrke, skal der kun anvendes ca. det halve af den målte trækstyrke. Dette

svarer til en værdi af  $k_s$  på ca. 25, eller en friktionsvinkel på ca.  $67^\circ$ . Indføres denne værdi, ændres figur 11.3.2 til figur 11.6.5. Ændringen består i, at den øverste kurve er erstattet af en lavere, mens de lavere liggende kurver er de samme. Deres gyldighedsområde er dog indskrænket ved ændringen.



Figur 11.6.5 Bæreevne af murværk  
 $h_s = 55 \text{ mm}$ ,  $h_f = 12 \text{ mm}$ ,  $b = 108 \text{ mm}$ ,  
 $k_s = 25$ ,  $k_f = 3$ .

Der blev lavet forsøg med to mørteltyper. De målte

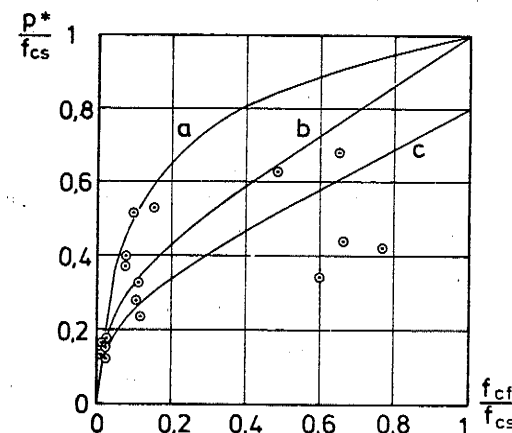


Figur 11.6.6 Mohr's cirkler for to mørteltyper, fra [73.1].

Mohr'ske cirkler er vist på figur 11.6.6. En retlinet tilnærmelse til deres indhyllingskurver kan godt antages at have en hældningsvinkel (friktionsvinkel) på  $30^\circ$ .

## 11.7 Forsøgsresultater

På figur 11.7.1 er vist resultaterne af to forsøgsserier, som er beskrevet i [44.1] og [51.2]. Forsøgene er trykforsøg med piller opmuret med forskellige sten- og mørteltyper. Kun forsøg, hvor stenstyrken var målt større end mørtelstyrken, er medtaget.



Figur 11.7.1 Resultaterne af 17 murstenspilletrykforsøg.

På figuren er indtegnet to kurver. Kurve a er den øverste kurve på figur 11.3.2, der som nævnt forudsætter en trækstyrke på op til 5% af trykstyrken, samt  $k_s = 3$ . Kurve b er den tilsvarende fra figur 11.6.5, som kun kræver op til 2% trækstyrke, og  $k_s = 25$ .

Af figuren ses for det første, at forsøgsresultaterne har en stor spredning. Det synes dernæst, som om bæreevnen stiger stærkt med mørtelstyrken for de svage mørtler, næsten efter teorien, mens den teoretiske bæreevne ikke kan opnås for de relativt stærke mørtler.

Dette forløb, først en stærk stigning, dernæst en langt mindre stigning, genfindes bedst i kurve a. Denne kurve ligger dog over stort set alle forsøgsresultaterne.

Kurve b, der bygger på målte brudbetingelser ved fleraksede spændingstilstande både i sten og mørtel, ses at passe udmærket for de lave mørtelstyrker, den er måske endog en smule konservativ. For de højere mørtelstyrker giver den dog også for høje værdier.

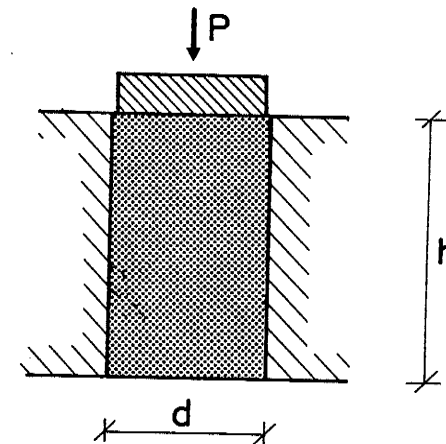
Det kan således konkluderes, at for de svage mørtler, dvs. op til ca. 20% af stenstyrken, opnår murpillerne den teoretiske styrke, mens dette ikke er tilfældet for de stærkere mørtler. Når mørtelstyrken nærmer sig til stenstyrken, skulle pillernes styrke teoretisk nærme sig den samme værdi. De opnår kun ca. 60% af denne.

Ved optegningen af kurve a og b på figur 11.7.1 er der ikke taget hensyn til, at den enaksede trykstyrke er lavere end terningsstyrken, som omtalt i kapitel 11.6. Regnes der med det samme forhold mellem disse to styrker for sten og mørtel, og sættes dette forhold til 0,8, skal de teoretiske kurver på figur 11.7.1 multipliceres med 0,8. Kurve b føres herved over i kurve c. Hermed bliver uoverensstemmelsen for de høje mørtelstyrker mindre, da kurve c ikke ligger langt over forsøgsresultaterne, når deres indbyrdes spredning tages i betragtning.

Det kan således konkluderes, at en plastisk beregning af murværks trykstyrke på grundlag af styrkerne af sten og mørtel er mulig, når blot der tages hensyn til stenenes begrænsede trækstyrke og udformningen af de forsøgsemner, hvorefter stenenes og mørtlens styrker findes.

## 12. Proppers bæreevne

### 12.1 Indledning



Figur 12.1.1 Prop af Coulomb-materiale.  
Udpresning af stift stempel.

I dette kapitel betragtes en prop af Coulomb-materiale indstøbt i et hul i et uendelig stærkt materiale, se figur 12.1.1. Proppens ene ende (den nedre) er fri, mens den øvre ende belastes med et tryk påført gennem et stift stempel. Overgangen til stempel henholdsvis væg kan være glat, delvist ru eller fuldstændig ru. Hullets sider er parallelle, endefladerne vinkelrette derpå, og belastningen står vinkelret på endefladerne. Figur 12.1.1 kan ses enten som plan deformationstilstand eller som rotationssymmetrisk tilstand, så "proppen" enten er en "plade" eller en egentlig rund prop.

Hvis væggen er glat, er bæreevnen nul. Der tages derfor udgangspunkt i den helt ru væg, dvs. at proppen er støbt ind i hullet med et usvækket støbeskel. Løsningen vil så senere blive modificeret til at gælde for delvist ru vægge.

Emnet har ikke kun akademisk interesse. Det karakteristiske ved problemet, nemlig det, at en masse presses ud mellem nogle ueftergivelige vægge, indgår i adskillige af denne afhandlings emner,

nemlig kapitel 7 om trykstyrken af "lave" prøvelegemer, kapitel 10 om forankring, kapitel 11 om murværk og kapitel 13 om silo-tryk.

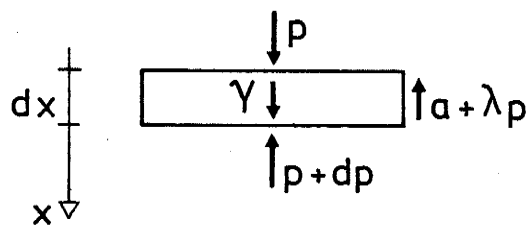
Før den rumlige behandling gives. skal der i det følgende afsnit vises to eksempler på endimensionale modeller, som kan beskrive spændingsforløbet udmærket i visse "propper". De parametre, der skal indsættes heri, kan dog kun findes ved rumlige undersøgelser. Disse beskrives i de senere afsnit.

## 12.2 Endimensionale modeller

I de to modeller, der opstilles i dette afsnit, antages det, at spændingsvariationen over de enkelte tværsnit i proppen er kendt. Der er således kun én ubekendt funktion, nemlig spændingsniveauets variation på langs ad proppen.

Den første model angår propper med konstant tværsnit og er en slags generaliseret udgave af Janssen's beregning af spændinger i et silo-medium. Den anden model beskriver propper, hvis tværmål varierer lineært med højden. Den følger princippet i Jenike's beregningsmodel for tryk i et silomedium i en silos udløbstragt, [64.1].

### Konstant tværsnit



Figur 12.2.1 Enakset model for tryk i prop.

Der betragtes en vandret skive i proppen, se figur 12.2.1. Skivens tværsnitsareal kaldes  $A$  og dens omkreds  $S$ . Der indføres skivens hydrauliske radius  $r_h$  gennem formlen

$$r_h = \frac{A}{S}$$

For en cirkel bliver dette lig med den halve radius, og for en stribe fås stribens halve bredde. De lodrette kræfter, der virker på skiven, er følgende: Trykket på oversiden  $pA$ , trykket på undersiden  $(p + dp)A$ , forskydningskraften på siden  $(a + \lambda p)Sdx$ , samt egenvægten  $\gamma Adx$ .  $p$  er middeltrykket over skiven. Da dette næppe er lig med trykket ved kanten af skiven, er parameteren  $\lambda$ , som angiver friktionen langs væggen, ikke kun en materialeparameter. Den afhænger også af spændingsfordelingen over tværsnittet. Da de fire på skiven virkende lodrette kræfter skal danne ligevægt, fås følgende differentialligning:

$$pA + \gamma Adx = (p+dp)A + (a+\lambda p)Sdx =$$

$$\frac{dp}{dx} = \gamma - \frac{a}{r_h} - \frac{\lambda}{r_h} p \quad (12.2.1)$$

Hvis  $\gamma$ ,  $a$  og  $\lambda$  er uafhængige af  $x$ , er løsningen hertil

$$p = (p_0 - \frac{\gamma r_h}{\lambda} + \frac{a}{\lambda}) e^{-\frac{\lambda}{r_h} x} + \frac{\gamma r_h}{\lambda} - \frac{a}{\lambda} \quad (12.2.2)$$

hvor  $p_0$  er en arbitrær konstant (værdien af  $p$  for  $x = 0$ ).

Formel (12.2.2) giver ikke en nøjagtig beskrivelse af forholdene i hele højden af en virkelig prop. Værdien af  $\lambda$  vil variere ved bunden af proppen og somme tider også ved toppen, men i et stykke herimellem vil variationen være lille. Formlen kan derfor udmærket bruges f.eks. til at vurdere højdens indflydelse på bæreevnen.

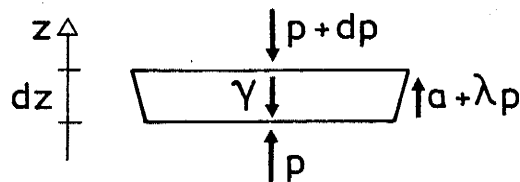
Som nævnt forudsættes det, at  $\lambda$  er uafhængig af  $x$ . En tilstrækkelig betingelse herfor er, at spændingsfordelingen over tværsnittet er ens i alle snit. Mere præcist betyder dette, at alle forskydningsspændinger og alle differencer mellem en normalspænding og trækspændingen  $c \cot \varphi$  skal være et produkt af  $p$  og en funktion af placeringen i tværsnittet. Heraf følger, at ligningen

$$\frac{c}{\tan \varphi} = \frac{a}{\lambda} \quad (12.2.3)$$

skal være opfyldt.

### Lineært varierende tværsnit

I den nederste tragtformede del af en silo er "proppen" kegleformet, dvs. at alle væggenes frembringere er rette linjer, som går igennem et bestemt punkt, keglens toppunkt. Alle afstande i tværsnittet varierer således proportionalt med højden over toppunktet. Spændingerne kan findes i en model, der er analog med den, der blev anvendt ved konstant tværsnit.



Figur 12.2.2 Enakset model for tryk i kegleformet prop.

Et udsnit af proppen er vist på figur 12.2.2. Af bekvemmelighedsgrunde er den nedadrettede x-akse på figur 12.2.1 her erstattet af en opadrettet z-akse med sit nulpunkt beliggende ud for keglens toppunkt. Tværsnittets omkreds  $S$  er proportional med  $z$ , og dets areal  $A$  er proportionalt med  $z^2$ :

$$S = s_0 z; \quad A = a_0 z^2$$

I det plane tilfælde erstattes dette af:  $S = s_0$ ;  $A = a_0 z$ . Ligesom før antages det, at trykket er fordelt på samme måde over alle tværsnit. Trykket på tværsnittet repræsenteres af middeltrykket  $p$ . Den lodrette komponent af trykket på væggen er som før en lineær funktion af  $p$ , nemlig  $a + \lambda p$ , beregnet således, så den lodrette kraft, der overføres, er  $(a + \lambda p)Sdz$ . Formel (12.2.3) forudsættes stadig opfyldt. Den lodrette ligevægtsligning opstilles som før, idet man dog nu skal huske det bidrag, der skyldes ændringen af tværsnitsarealet:

$$(p+dp)(A+dA) + \gamma Adz = pA + (a+\lambda p)Sdz =$$

$$A \frac{dp}{dz} + p \frac{dA}{dz} + \gamma A - (a+\lambda p)S = 0$$

Som før indføres den hydrauliske radius  $r_h = \frac{A}{S} = \frac{a_0}{s_0} z = r_0 z$ , og vi får

$$r_0 z \frac{dp}{dz} + 2pr_0 + \gamma r_0 z - a - \lambda p = 0 =$$

$$z \frac{dp}{dz} - \frac{\lambda - 2r_0}{r_0} p + \gamma z - \frac{a}{r_0} = 0 \quad (12.2.4)$$

I det plane tilfælde erstattes 2-tallet i ligningen med et ettal.

Løsningen til differentialligningen er

$$p = \frac{\gamma r_0 z}{\lambda - 3r_0} - \frac{a}{\lambda - 2r_0} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{\lambda - 2r_0}{r_0}} \left(p_0 - \frac{\gamma r_0 z_0}{\lambda - 3r_0} + \frac{a}{\lambda - 2r_0}\right) \quad (12.2.5)$$

I det plane tilfælde erstattes alle 2-tal med 1-tal og 3-tal med 2-tal.

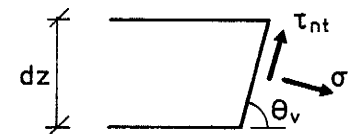
Den arbitrære konstant  $p_0$  er afpasset, så man får  $p = p_0$  for  $z = z_0$ .

Det ses, at løsningen indeholder en lineær funktion (de to første led i (12.2.5)), som er uafhængig af trykniveauet  $p_0$ , samt et potensudtryk. Da eksponenten her normalt vil være større end 1, vil indflydelsen af det sidste led forsvinde for små værdier af  $z$ . Når  $z$  nærmer sig nul, vil trykket altså (asymptotisk) variere lineært og være uafhængigt af belastningen højere oppe i proppen.

Ved beregningen af  $a$  og  $\lambda$  skal man være opmærksom på, at  $S$  er omkredsen af proppen og ikke proppens overfladeareal pr. højdeenhed. Hvis man kalder normalspændingen ved proppens begrænsning  $\sigma_n$  og forskydningsspændingen  $\tau_{nt}$ , se figur 12.2.3, bliver den lodrette kraft, der overføres til væggen inden for højden  $dz$ ,

$$(a+\lambda p)Sdz = (\tau_{nt} - \sigma_n \cot \theta_v)Sdz \quad (12.2.6)$$

Her er  $\theta_v$  væggenes hældning med vandret. Hvis  $\sigma_n$  og  $\tau_{nt}$  er kendte, lineære funktioner af  $p$ , kan  $a$  og  $\lambda$  bestemmes heraf.



Figur 12.2.3 Spændinger ved proppens begrænsning.

### 12.3 Plan deformationstilstand

#### Konstant tværsnit

Ved plan deformationstilstand, vægtløst materiale og fuldstændig ru vægge bliver løsningen den i afsnit 11.4 fundne løsning for fugeforankring i murværk, se figur 11.4.1. Sliplinjefeltet vil nærme sig asymptotisk til det i afsnit 5.5 udledte cykloidefelt. Hvis væggene kun er delvist ru, vil løsningen også nærme sig til cykloidefeltet, men nu kun til et mindre udsnit af dette, og sliplinjerne vil ikke tangere væggen.

I afsnit 11.3 er vist en analytisk nedreværdiløsning med cykloidefeltet, se figur 11.3.1. Et stykke fra bunden er forskellen mellem de to løsninger, at nedreværdiløsningen bruger et lidt længere stykke (ca. 0.1d mere for  $\varphi = 30^\circ$ ) til at opnå det samme tryk i proppen.

Spændingerne i proppen et stykke over bunden kan således beskrives ved en løsning med cykloidefeltet som på figur 11.3.1, og der kan i denne løsning regnes med en lidt større længde af proppen end den aktuelle. For denne løsning er  $\lambda$  konstant, og den kan bestemmes analytisk. Den afhænger af friktionsvinklen  $\varphi$  og af trykhældningen ved væggen, dvs. af vægfriktionsvinklen  $\varphi_v$ .

Ved sammenligning af (5.5.3) og (12.1.2) ses nemlig, at spændingerne i begge tilfælde vokser eksponentielt. I (5.5.3) skal indsættes  $\theta = 0$ , svarende til midten af feltet ( $y = 0$ ). Eksponenterne i de to tilfælde må da være ens på nær det fortegnsskift, som skyldes, at x-akserne i de to tilfælde er vendt hver sin vej:

$$\frac{2\lambda}{r} = \frac{\sin\varphi}{c_0 \cos^2\varphi} \quad (12.3.1)$$

Hovedspændingsretningen ved væggen  $\theta_v$  findes som komplementsvinklen til den vinkel, der angives af formel (5.11.1) langs en delvis ru væg:

$$\begin{aligned} \theta_v &= \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_v}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin\varphi_v}{\sin\varphi} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_v}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin\varphi_v}{\sin\varphi} \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

For denne vinkel fås af (5.5.2)

$$\begin{aligned} y = \frac{r}{2} &= c_0 (2\theta_v \sin\varphi + \sin 2\theta_v) \Rightarrow \\ \frac{r}{2c_0} &= \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_v - \arccos \frac{\sin\varphi_v}{\sin\varphi} \right) \sin\varphi + \cos(\varphi_v - \arccos \frac{\sin\varphi_v}{\sin\varphi}) \end{aligned} \quad (12.3.3)$$

Dette indsættes i (12.3.1), hvorefter  $\lambda$  findes:

$$\begin{aligned} \lambda &= \tan\varphi \left( \left( \frac{\pi}{2} + \varphi_v - \arccos \frac{\sin\varphi_v}{\sin\varphi} \right) \tan\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\cos\varphi} \cos(\varphi_v - \arccos \frac{\sin\varphi_v}{\sin\varphi}) \right) \end{aligned} \quad (12.3.4)$$

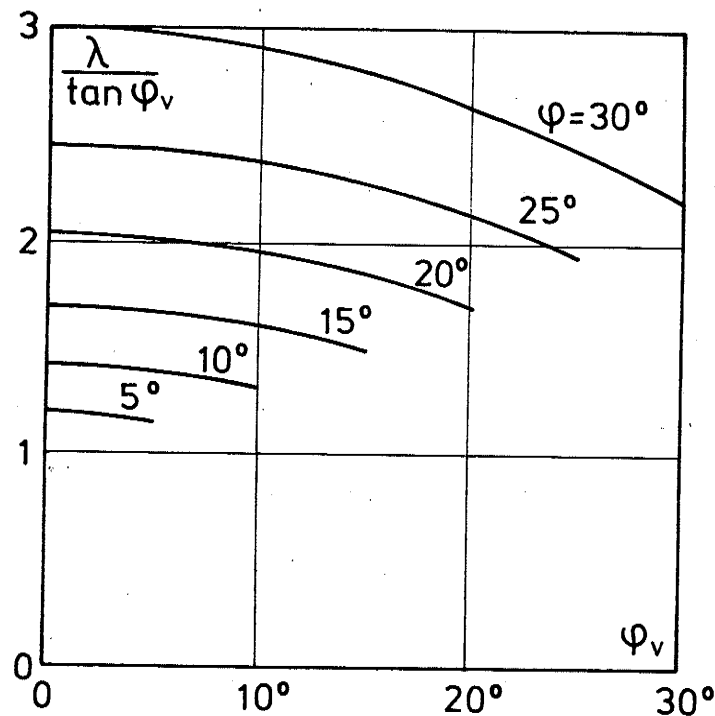
Resultatet (12.3.4) kan illustreres som vist på figur 12.3.1, der viser "sidetrykkoeficienten"  $\lambda/\tan\varphi_v$ .

Beregningen kan gennemføres for aktivt tryk på tilsvarende måde. Resultatet bliver, at der i formel (12.2.4) skal skiftes fortegn foran  $\frac{\pi}{2}$  og de to arccos-led. Dette resultat opnås også ved formelt at indsætte  $\varphi$  med negativt fortegn. Det skal dog her erindres, at det altid gælder, at  $0 \leq \arccos x \leq \pi$ , forudsat  $|x| \leq 1$ .

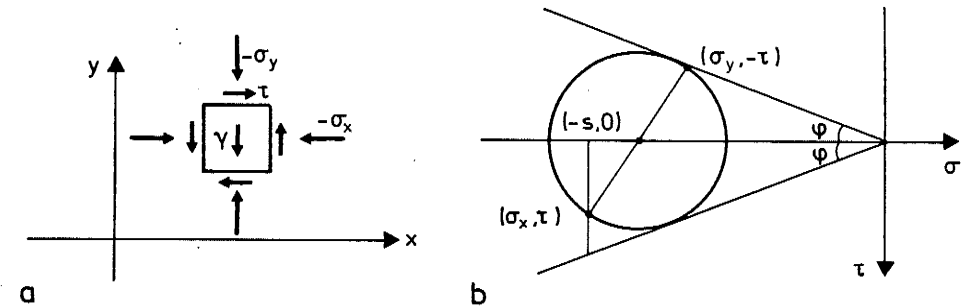
For de områder i en silo, hvor spændingerne er uafhængige af højden, se f.eks. figur 13.3.11c, er  $\lambda$  også konstant. Den kan beregnes analytisk, se figur 12.3.2. Af ligevægtsligningerne fås, da  $\tau$  og  $\sigma_y$  er uafhængige af  $y$ , at  $\sigma_x$  må være uafhængig af  $x$ , samt at  $\tau$  må variere lineært:

$$\tau = \gamma x \quad (12.3.5)$$





Figur 12.3.1 Sidetrykskoefficient for plan deformationstilstand, passivt tryk, rumvægten uden betydning (cykloidefelt).



Figur 12.3.2 Beregning af sidetrykskoefficient for silomedium med rumvægt og spændinger, der ikke varierer med højden.

I Mohr's plan ligger altså alle punkterne  $(\sigma_x, \tau)$  på samme lodrette linjestykke. For at simplificere beregningerne sættes  $-\sigma_x$  formelt til 1. Centrum for Mohr's cirkel kan nu findes

$$s \sin \varphi = \sqrt{\tau^2 + (1-s)^2} \quad \circ$$

$$s^2 \cos^2 \varphi - 2s + 1 + \tau^2 = 0 \quad \circ$$

$$s = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\tan^2 \varphi - \tau^2} \quad (12.3.6)$$

Her er valgt fortegnet minus foran kvadratroden. Dette giver løsningen for passivt tryk i proppen. Ved aktivt tryk skal fortegnet være plus. Når  $s$  er beregnet, kan  $\sigma_y$  findes:

$$-\sigma_y = 2s - (-\sigma_x) \quad (12.3.7)$$

Dernæst beregnes middeltryksspændingen

$$\bar{p} = \frac{1}{x} \int_0^x (-\sigma_y) dx \quad (12.3.8)$$

Ved sammenligning med figur 12.2.1 ses, at sidetrykskoefficienten er

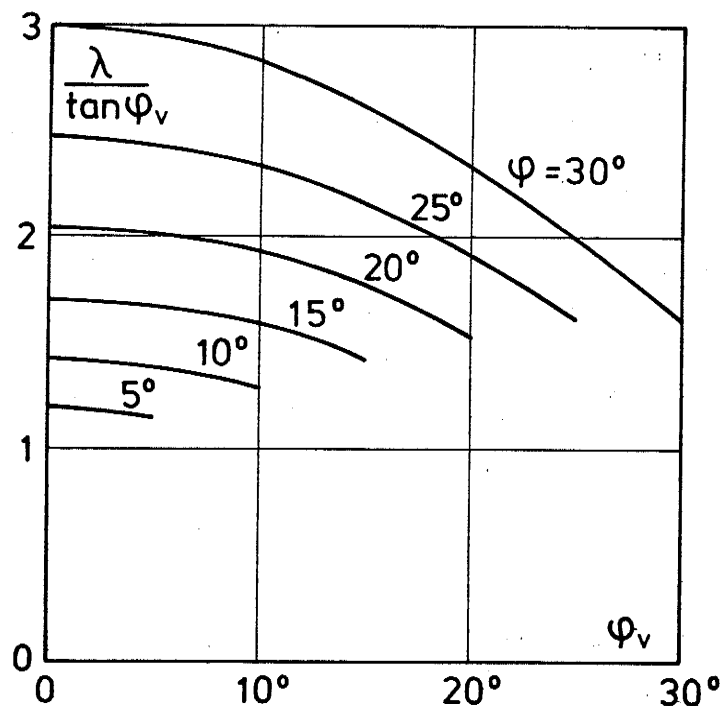
$$\frac{\lambda}{\tan \varphi} = \frac{-\sigma_x}{\bar{p}} \quad (12.3.9)$$

Ved at udføre de ovenfor resumerede beregninger og benytte, at bredden er bestemt af vægfriktionsvinklen gennem ligningen

$$\frac{\tau_{væg}}{-\sigma_x} = \tan \varphi_v \quad (12.3.10)$$

fås følgende analytiske udtryk for sidetrykskoefficienten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\tan \varphi_v} &= \frac{\cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi - \sin \varphi \left[ \sqrt{1 - X^2} + \frac{1}{X} \arcsin X \right]} \\ X &= \frac{\tan \varphi_v}{\tan \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (12.3.11)$$



Figur 12.3.3 Sidetrykskoefficient for plan deformationstilstand, passivt tryk, spændingerne domineret af rumvægten.

Resultatet heraf er vist på figur 12.3.3. Ved den tilsvarende beregning for aktivt tryk skal der i formel (12.3.11) skiftes fortegn foran parantesen, der repræsenterer integrationen af kvadratroden i formel (12.3.6). Det samme opnås ved formelt at indsatte  $-\varphi$  i stedet for  $\varphi$  i (12.3.11).

Sammenlignes figur 12.3.3 med figur 12.3.1 ses det, at kurverne har samme værdi for  $\varphi_v = 0$ , nemlig  $k = \tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$ . For større værdier af  $\varphi_v$  falder kurverne for den silo, hvor spændingerne domineres af rumvægten, kraftigere med  $\varphi_v$  end kurverne for den silo, hvor rumvægten er uden indflydelse.

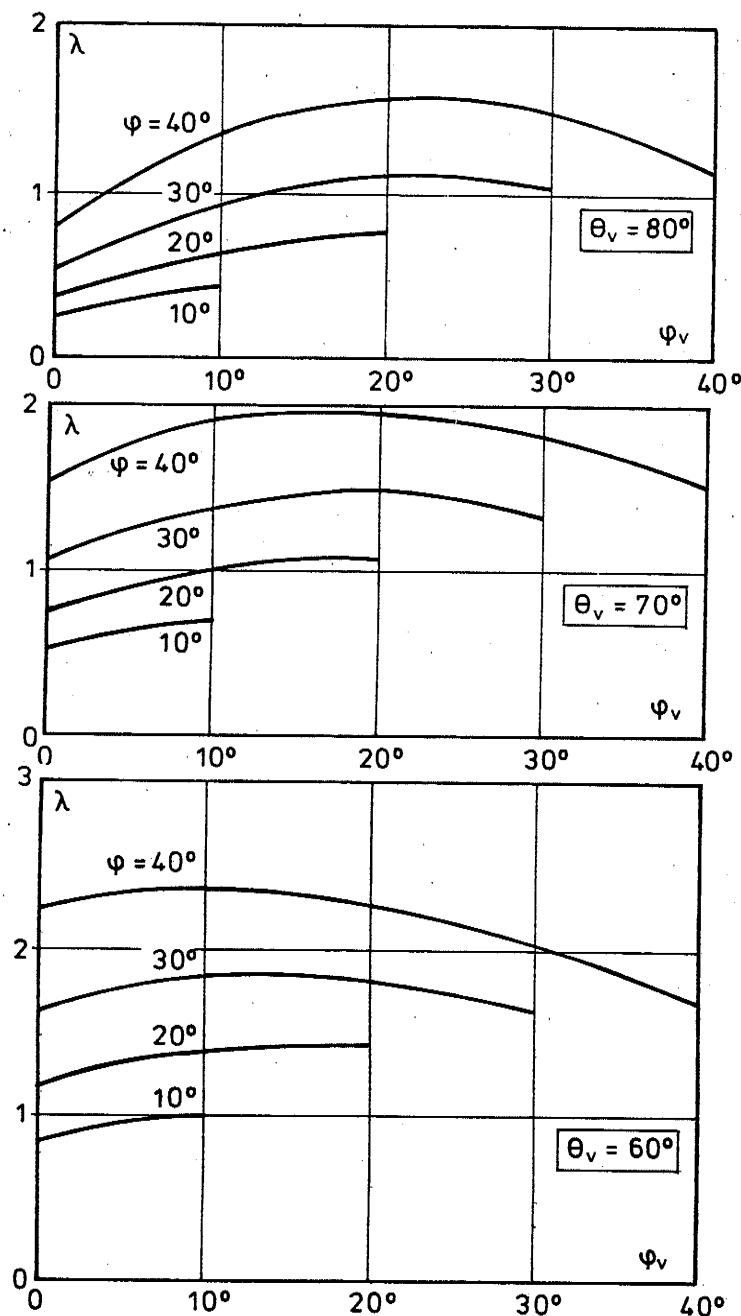
#### Lineært varierende tværsnit

I afsnit 12.2 blev den endimensionale trykbestemmelse undersøgt for en prop med lineært varierende tværsnit. Der blev opstillet differentialligningen (12.2.4), og løsningen blev angivet (12.2.5). Den består af en lineær del og et potensudtryk. Hvis trykket på proppen har den værdi, det lineære udtryk angiver, bortfalder potensudtrykket. I dette tilfælde er forudsætningen om, at  $\lambda$  er konstant, eksakt opfyldt.  $\lambda$  kan findes.

Beregningerne kan udføres med udgangspunkt i spændingerne i det lodrette symmetrisnit. Her er hovedspændingsretningerne lodrette og vandrette med størst tryk (tredje hovedspænding) på lodrette snit. Spændingerne varierer lineært med højden med værdien nul i keglens toppunkt. Cohæsionen, som ikke har nogen indflydelse på værdien af  $\lambda$ , sættes til nul. Spændingerne findes ud fra dette som angivet i første begyndelsesværdiproblem, jvf. afsnit 5.2.

Når spændingerne er fundet, kan middeltrykket  $p$  i et vandret snit beregnes. For en valgt væghældningsvinkel  $\varphi_v$ , se figur 12.2.3, kendes spændingerne på væggen,  $\sigma_n$  og  $\tau_{nt}$ .

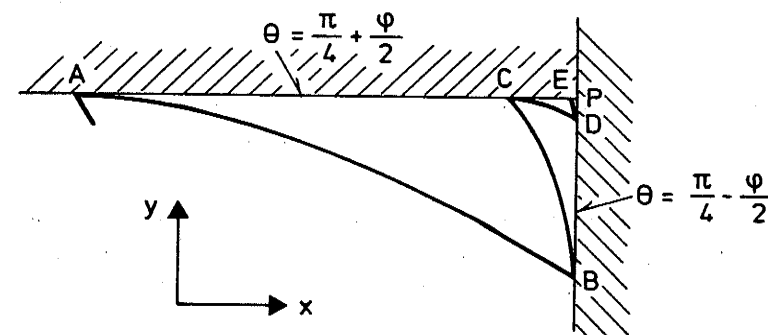
Ved hjælp af formel (12.2.6) kan  $\lambda$  beregnes. Resultatet heraf er vist på figur 12.3.4, der viser  $\lambda$  som funktion af  $\varphi$ ,  $\varphi_v$  og  $\varphi_v$ . Figur 12.3.3 er et specialtilfælde heraf, nemlig  $\varphi_v = 90^\circ$ .



Figur 12.3.4 Sidetryk-parameteren  $\lambda$  i en silotragt. Plan deformationstilstand.

### Et hjørneproblem

Vi vender nu tilbage til figur 12.1.1 for at behandle et specielt problem, der kan opstå øverst i hjørnet ved stempet. En betydelig del af lasten på stemplet vil føres direkte fra et område nær stemplets rand som tryk ned til den øverste del af røret. Denne overførsel går skråt igennem stemplets og rørets overflader, og der må derfor stilles visse krav til vægfriktionsvinklerne her. Hvis disse vinkler er tilstrækkeligt store, kan hjørnet blive så stærkt "indeklemt", så spændingerne går mod uendelig, når man nærmer sig hjørnet. Hermed haves altså et eksempel på en ideelt plastisk konstruktion, hvor spændingerne visse steder er ubegrænsede. Som det vil blive vist senere, er den teoretiske bæreevne dog som regel stadig begrænset.



Figur 12.3.5 Sliplinjefelt ved "indeklemt" hjørne.

Hvis både væggen og stemplet er helt ru, vil hovedspændingsretningen ved væg henholdsvis stempel være  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$  og  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ , se fig. 12.3.5. Alle sliplinjernes, AB, BC, CD, DE osv. vil derfor have den samme vinkel mellem deres endetangenter, nemlig  $\phi$ . Hvis væg eller stempel kun er delvis ru, fås en mindre vinkel, se afsnit 5.11.

Da det interessante i dette problem foregår inden for et lille område, og spændingerne heri varierer meget kraftigt, kan egenvægten negligeres. Variation i spændingsniveau'et langs en af sliplinjerne kan nu findes ved integration af formel (5.1.2):

$$ds = \mp 2(s \tan \varphi + c) d\theta \Rightarrow$$

$$s = (s_0 + c \cot \varphi) e^{\mp 2 \tan \varphi (\theta - \theta_0)} - c \cot \varphi$$

Med  $|\theta - \theta_0| = \Delta\theta$  fås her

$$s_B + c \cot \varphi = (s_A + c \cot \varphi) e^{2\Delta\theta \tan \varphi} \quad (12.3.12)$$

$$s_C + c \cot \varphi = (s_B + c \cot \varphi) e^{2\Delta\theta \tan \varphi}$$

osv.

Ud fra spændingsniveauet ved A kan spændingerne nu bestemmes i alle punkterne B, C, D osv., og det ses, at spændingen går mod uendelig, når punktet går mod P. Hvis både væg og stempel er helt ru, er  $\Delta\theta = \varphi$ .

Her skal bestemmes et tilnærmet udtryk for den forskydningskraft, der overføres langs BP. Spændingen er kendt i nogle punkter på BP, men disse punkters nøjagtige placering er ikke kendt, og spændingen kendes heller ikke imellem disse punkter.

Det gælder imidlertid, at sliplinjerne asymptotisk vil få samme form, efterhånden som de nærmer sig til P. Hvis AB havde denne grænseform, ville alle de senere sliplinjer også få denne form, og spændingerne ville vokse mod uendelig efter formlen

$$\frac{\tau}{\tau_B} = \left(\frac{x}{x_B}\right)^f \quad (12.3.13)$$

hvor x-aksen har begyndelsespunkt i O og går gennem B. Potensen f er negativ. Den kan findes ved hjælp af  $x_D$ :

$$\frac{\tau_D}{\tau_B} = \left(\frac{x_D}{x_B}\right)^f = e^{4\Delta\theta \tan \varphi} \Rightarrow$$

$$f = \frac{4\Delta\theta \tan \varphi}{\ln\left(\frac{x_D}{x_B}\right)} \quad (12.3.14)$$

Sliplinjerne kan tilnærmes med cirkelbuer, der har de korrekte tangentretninger i enderne. Man får

$$\begin{aligned} \frac{|BP|}{|AP|} &= \tan(-\bar{\theta} + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \\ \frac{|CP|}{|BP|} &= \tan(\bar{\theta} - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) \\ \frac{|CP|}{|AP|} &= \frac{\sin 2\bar{\theta} - \cos \varphi}{\sin 2\bar{\theta} + \cos \varphi} \end{aligned} \quad (12.3.15)$$

Her er  $\bar{\theta}$  den gennemsnitlige hovedspændingsretning i området  $\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_A + \theta_B)$ . I den rigtige løsning vil AB have størst krumning nær B, og BC vil have størst krumning nær C. Formel (12.3.15) vil derfor give for stor en værdi. Fejlen vil være størst for store friktionsvinkler. Hvis stemplet og væggen er lige ru, er  $\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}$ , og (12.3.15) kan skrives

$$\frac{|CP|}{|AP|} = \frac{x_D}{x_B} = \tan^2 \frac{\varphi}{2} \quad (12.3.16)$$

Dette indføres i (12.3.14), som for helt ru stempel og væg bliver

$$f = \frac{4\varphi \tan \varphi}{\ln\left(\tan^2 \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2\varphi \tan \varphi}{\ln\left(\tan \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (12.3.17)$$

Ved integration af (12.3.13) fra P til B fås en overført forskydningskraft på stykket BP på

$$F = \frac{\tau_B x_B S}{1+f} \quad (12.3.18)$$

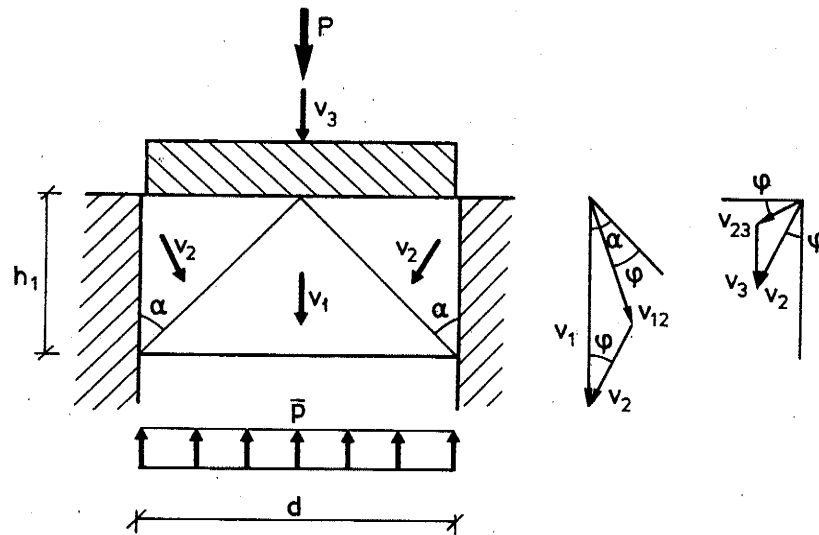
hvor f beregnes ved hjælp af (12.3.17). S er omkredsen, jvf. afsnit 12.2. (12.3.18) gælder kun, når  $f > -1$ . I andre tilfælde fås formelt en ubegrænset kraft. Med den værdi af f, som (12.3.17) giver, fås dette for  $\varphi \geq 39^\circ$ ; for større friktionsvinkler end ca.  $39^\circ$  fås altså formelt en uendelig bæreevne af proppen. Dette er dog ikke korrekt, men skyldes, at (12.3.16) som nævnt giver en for høj værdi. Derved bliver den numeriske værdi af f ifølge (12.3.17) også for høj.

Proppens bæreevne er nemlig ikke uendelig, så længe stemplets underside er plan, og friktionsvinklen  $\varphi$  er mindre end  $45^\circ$ . Dette indses ved hjælp af mekanismen på figur 12.3.6. Figuren viser den øverste del

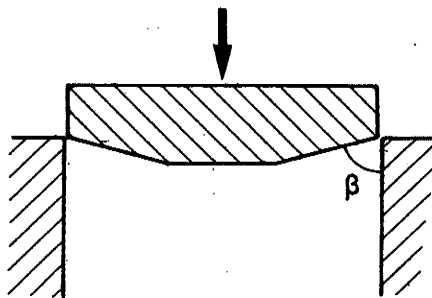
af proppen. De øvrige dele af proppen giver et middeltryk  $\bar{p}$  på den betragtede del. Ved mekanismen splittes proppen i tre dele, som bevæges med hastighederne  $V_1$  og  $V_2$ . Proppen bevæges  $V_3$ . Der er flydning langs væggen og langs stempet. Analysen af bevægelserne giver

$$V_2 = V_1 \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$$

$$V_3 = V_2 \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$$



Figur 12.3.6 Øvreværdimekanisme for propudpresning.  
Øverste del af proppen.



Figur 12.3.7 Stempel med kanter, som "fastlåser" materialet og giver meget stor bæreevne.

Dissipationen og det ydre arbejde bliver

$$D = dV_1 c \cot \varphi$$

$$A_Y = PV_3 - \bar{p} dV_1$$

Øvreværdien for bæreevnen beregnes:

$$D = A_Y =$$

$$\frac{P}{d} = (c \cot \varphi + \bar{p}) \frac{\cos \varphi \sin \alpha}{\cos 2\varphi \sin(\alpha - \varphi)} \quad (12.3.19)$$

Formel (12.3.19) viser, at bæreevnen er begrænset, så længe friktionsvinklen er mindre end  $45^\circ$ , og  $h_1$  er så lille, så  $\alpha$  kan vælges større end  $\varphi$ .

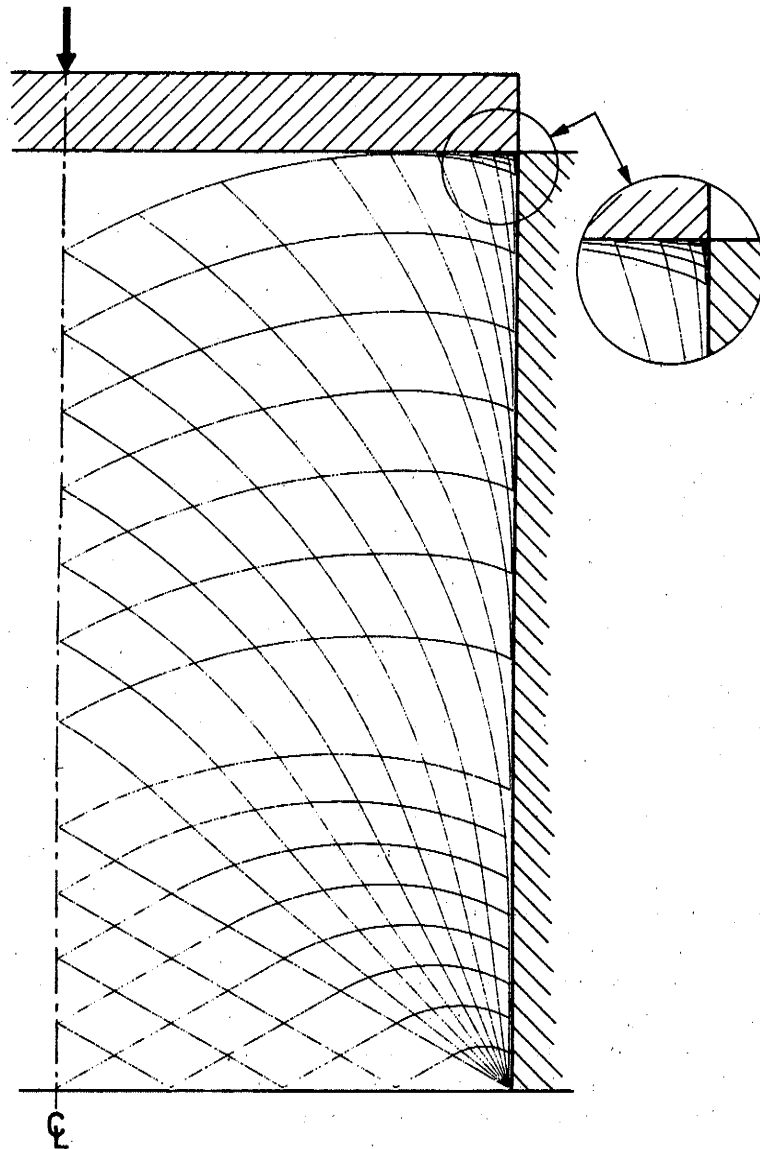
Formel (12.3.17) gælder altså kun for relativt lave friktionsvinkler. Den giver som nævnt numerisk for store værdier af  $f$ .

Hvis derimod stempet ved sin yderkant får en udformning, så vinklen mellem stempel og væg  $\beta$  bliver mindre end  $2\varphi$ , se figur 12.3.7, er en mekanisme som den på figur 12.3.6 ikke længere mulig, og den teoretiske bæreevne kan da være ubegrænset. Dette kan dog kun gælde teoretisk. Det forudsætter nemlig, at Coulomb's flydebetingelse gælder for vilkårligt høje spændingsniveau'er, og at det materiale, der omslutter proppen kan modstå det ubegrænsede tryk, det vil blive udsat for. Begge disse betingelser er ikke opfyldt.

#### 12.4 Rotationssymmetrisk tilstand

På figur 12.4.1 er vist sliplinjenettet for en rotationssymmetrisk, ru prop med højde 2.1 gange radius, presset ned af et helt ru stempel. Da alle radiære flytninger går mod centrum, gælder her  $k = -1$ . Den nederste Rankine-zone er bibeholdt, men Prandtl-zonen med pol ved nederste højre hjørne har nu ikke længere nogen rette sliplinjer. De sliplinjer, der udgår fra polen, vil i viftezonen få en svag krumning opad. Den sliplinje, der starter med lodret tangent, vil overskride proppens begrænsningslinje og derfor være uaktuel. Den yderste sliplinje, der hører med til løsningen, er den, der tangerer væggen. Den smalle strimmel af materiale, der ligger mellem denne linje og væggen, deltager ikke i bruddet. Den asymptotiske form af sliplinjerne

et stykke fra bunden er nu ikke længere en cykloidebue, men en anden form lidt forskellig fra denne. Øverst til højre på figuren genfinder man hjørnezonen, som er omtalt i forrige afsnit.



Figur 12.4.1 Rund prop, ru stempel,  $\varphi = 30^\circ$ .

På figur 12.4.2 er vist bæreevnen af en rund, ru prop som en funktion af højden. Kurverne er fundet ved numerisk integration af forskydningsspændingerne langs siden af proppen, dvs. uden hensyntagen til den forøgelse, der sker i hjørnezonen. Der er vist to forskellige udformninger af proppens bund, nemlig A: den plane, som på figur 12.4.1, og B: en kugleformet bund, hvis radius er afpasset, så viftezone på figur 12.4.1 forsvinder.

I enkeltlogaritmisk afbildning har kurverne en skrå asymptote med hældning 1.08. Ved sammenligning med formel (12.2.2) ses, at dette svarer til en sidetrykskoefficient på

$$\frac{\lambda}{\tan \varphi} = \frac{1,08}{2 \log_{10} e \tan 30} = 2.15 \quad (12.4.1)$$

Den tilsvarende værdi for plan deformationstilstand aflæses på figur 12.3.1 (eller formel (12.3.4)) for  $\varphi = \varphi_v = 30^\circ$ . Den er 2.21, hvilket kun er 3% mere. Den største forskel mellem plan og rotationssymmetrisk tilstand opstår ved ru væg som her. Det kan altså konkluderes, at de sidetrykskoefficienter, der blev bestemt for plan deformationstilstand, kan anvendes også ved rotationssymmetrisk tilstand. Der opstår kun en ganske ringe fejl.

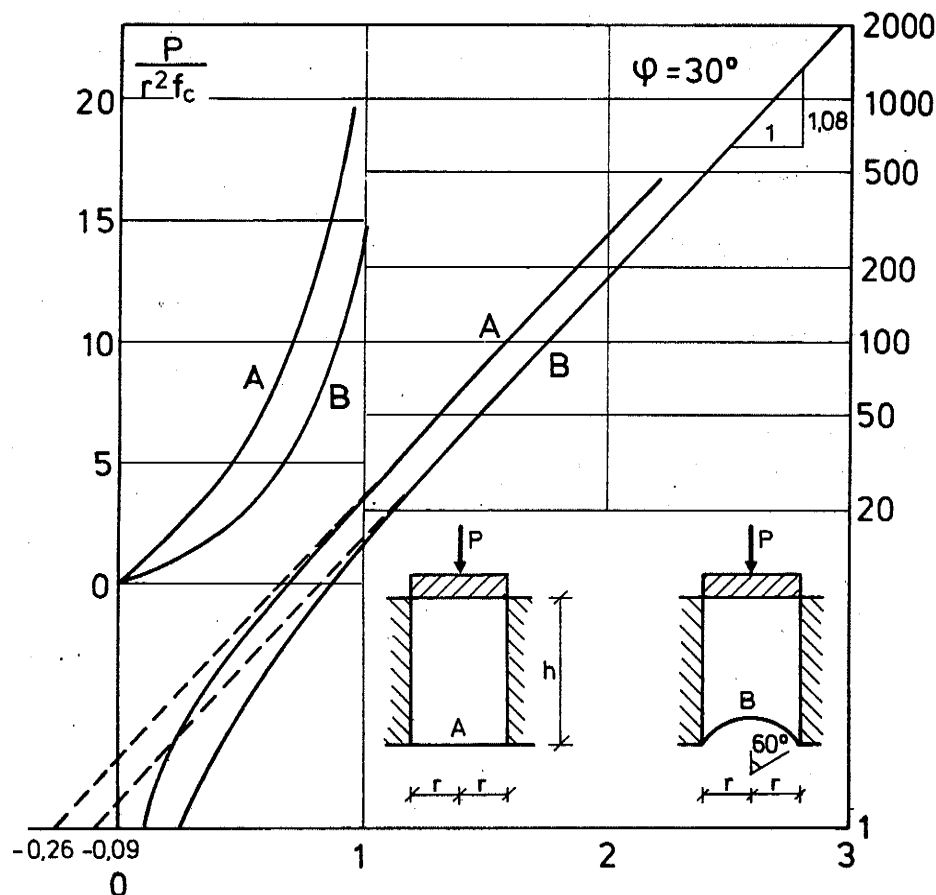
På figur 12.2.1 ses, at asymptoten for A skærer absцisseaksen i værdien -0,264. Den har altså ligningen

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{p}{f_c} &= 1,08 \times \left( \frac{h}{r} + 0,264 \right) = \\ \frac{p}{f_c} &= \frac{1}{\pi} \times 10^{1,08 \times \left( \frac{h}{r} + 0,264 \right)} = \\ \frac{p}{f_c} &= 0,6137 e^{2,486 \frac{h}{r}} \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

Ifølge (12.2.2) skal asymptoten have ligningen

$$p = \frac{a}{\lambda} e^{\frac{2\lambda}{r} h} \quad (12.4.3)$$

Heri er  $\lambda = 1,243$ , hvilket ses af (12.4.1).  $a$  er cohasionen, da væggen her er helt ru:



Figur 12.4.2 Bæreevnen af rund, ru prop,  
A med plan bund, B med kugleformet bund.

$$a = \frac{f_c}{2\sqrt{k}} = \frac{f_c}{2\sqrt{3}} = 0,2887 f_c \quad (12.4.4)$$

Ved sammenligning af (12.4.2) og (12.4.3) fås nu

$$p = \frac{a}{\lambda} e^{\frac{2\lambda}{r}(h-h_0)} \quad (12.4.5)$$

$$\frac{p}{f_c} = \frac{0,2887}{1,243} e^{2,486(\frac{h}{r} + 0,391)}$$

Det sliplinjenet, som findes nær bunden af den plant afsluttede prop, figur 12.4.1, giver altså et modhold, der svarer til en ekstra længde af proppen på 0,391 r ifølge den simple, endimensionale model (12.2.2). Dette skyldes, at sidetryskoefficienten er større nær bunden end længere oppe i proppen.

For bundudformning B bliver den ekstra længde  $0,391 - 0,264 + 0,088 = 0,215$  gange radius. Længden måles fra proppeens nederste kant.

For en delvist ru prop med plan bund findes sliplinjenettet ved at formindske centervinklen i viftezone ved den nederste kant af proppen. Vinklen afpasses, så vægfriktionsbetingelsen her bliver overholdt, og ved den videre beregning kræves denne betingelse overholdt langs væggen. Sliplinjerne vil nu ikke længere indhulle væggen. Det viser sig, at sliplinjerne skærer hinanden i et punkt inde i proppen. For at regne videre herfra på korrekt måde skal man indføre en spændingsdiskontinuitetslinje. Da en sådan ikke indgår i det anvendte program, har jeg valgt en anden måde at klare problemet på. Bundens form er ændret fra den plane til en krum form, f.eks. en kugleform. Heri er hældningen ved kanten valgt, så viftezone helt udgår. Derefter går beregningen uden problemer.

#### 12.5 Eksempel

For at vise hvordan det foregående kan anvendes, skal beregnes bæreevnen af en prop med højden lig med diameteren af Coulomb-materiale med  $\varphi = 30^\circ$ . Stemplet antages helt ru, mens vægfriktionsvinklen antages at være  $\varphi_v = 25^\circ$ .

Af figur 12.2.1 aflæses

$$\frac{\lambda}{\tan \varphi_v} = 2,45 \Rightarrow \lambda = 2,45 \tan 25^\circ = 1,142$$

$$a = \frac{f_c}{2\sqrt{3}} \frac{\tan 25^\circ}{\tan 30^\circ} = 0,233 f_c$$

I overensstemmelse med afsnit 12.4 gives højden formelt et tillæg

$$\frac{h}{r} = 2 + \sim 0,3 = 2,3$$

Hovedspændingsretningen ved væggen beregnes ved hjælp af formel (5.11.1)

$$\theta_v = 45^\circ - \frac{25^\circ}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 25^\circ}{\sin 30^\circ} = 48,65^\circ$$

Hovedspændingsretningen ved stemplet er

$$\theta_s = 45^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 60^\circ$$

Middelhovedspændingsretning og variation af denne bliver

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2} \times (60^\circ + 48,65^\circ) = 54,33^\circ; \Delta\theta = 60^\circ - 48,65^\circ = 11,35^\circ$$

Potensen  $f$ , som fremgår af (12.3.17) i det helt ru tilfælde, findes her af (12.3.14), hvor nævneren findes af (12.3.15):

$$f = \frac{4 \times 11,35 \times \frac{\pi}{180} \times \tan 30^\circ}{\ln \left( \frac{\sin(2 \times 54,33^\circ) - \cos 30^\circ}{\sin(2 \times 54,33^\circ) + \cos 30^\circ} \right)} = -0,147$$

Højden af hjørnezonen  $h_1$  (svarende til PB på figur 12.3.4) er omtrent

$$\frac{h_1}{r} = \frac{60 - 48,65}{90 - 48,65} \times \tan(-54,33^\circ + 45^\circ + 15^\circ) = 0,0273$$

Middeltrykket under hjørnezonen er ifølge (12.2.2)

$$\frac{p_1}{f_c} = \frac{0,233}{1,142} \times (e^{2 \times 1,142 \times (2,3 - 0,0273)} - 1) = 36,54$$

I hjørnezonen overføres ifølge (12.3.18) en kraft  $F$ :

$$\frac{F}{S f_c} = (0,233 + 1,142 \times 36,54) \times \frac{0,0273}{1 - 0,147} = 1,34$$

Middeltrykket på stemplet bliver i alt

$$p = (36,54 + 2 \times 1,34) f_c = 39,22 f_c$$

Uden hensyntagen til hjørnezonen ville fås

$$p = \frac{0,233}{1,142} \times (e^{2 \times 1,142 \times 2,3} - 1) f_c = 38,90 f_c$$



### 13. SILOTRYK

#### 13.1 Indledning

En silo er en høj beholder til opbevaring af granulære medier. Den har ofte en cirkulær grundplan. Siderne er lodrette på den øverste del og skrå på den nederste, så mediet samles til udløbet. Den består således af en cirkulær cylinder og en heglestub på spidsen.

At beskrive spændingerne i et kornet medium i en silo er et stort og endnu uløst problem. Her skal redegøres for, hvilke muligheder og begrænsninger plasticitetsteorien i den anvendte form giver.

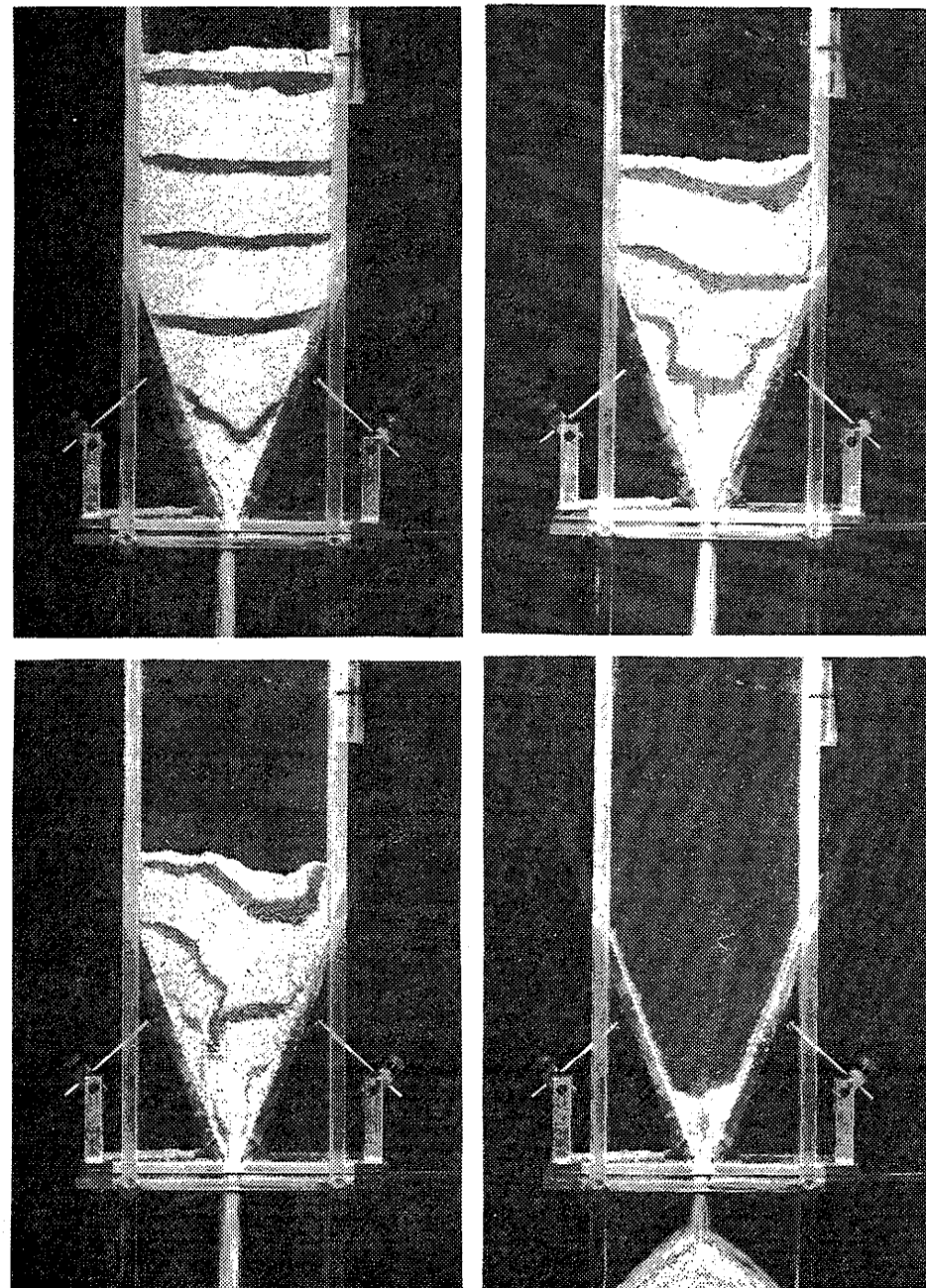
Belastningsforløbet opdeles naturligt i tre afsnit: fyldning, hvile og tømning.

Ved fyldningen falder mediet ned i siloen og lægger sig oven på det tidligere lejrede medium. Lejringstætheden og -formen afhænger af fyldningsmetoden, f.eks. om mediet falder som en hård samlet stråle eller en mere spredt "regn", og om det falder i midten af siloen eller tæt ved en af væggene. Lejringen kan af disse grunde blive både inhomogen og anisotrop.

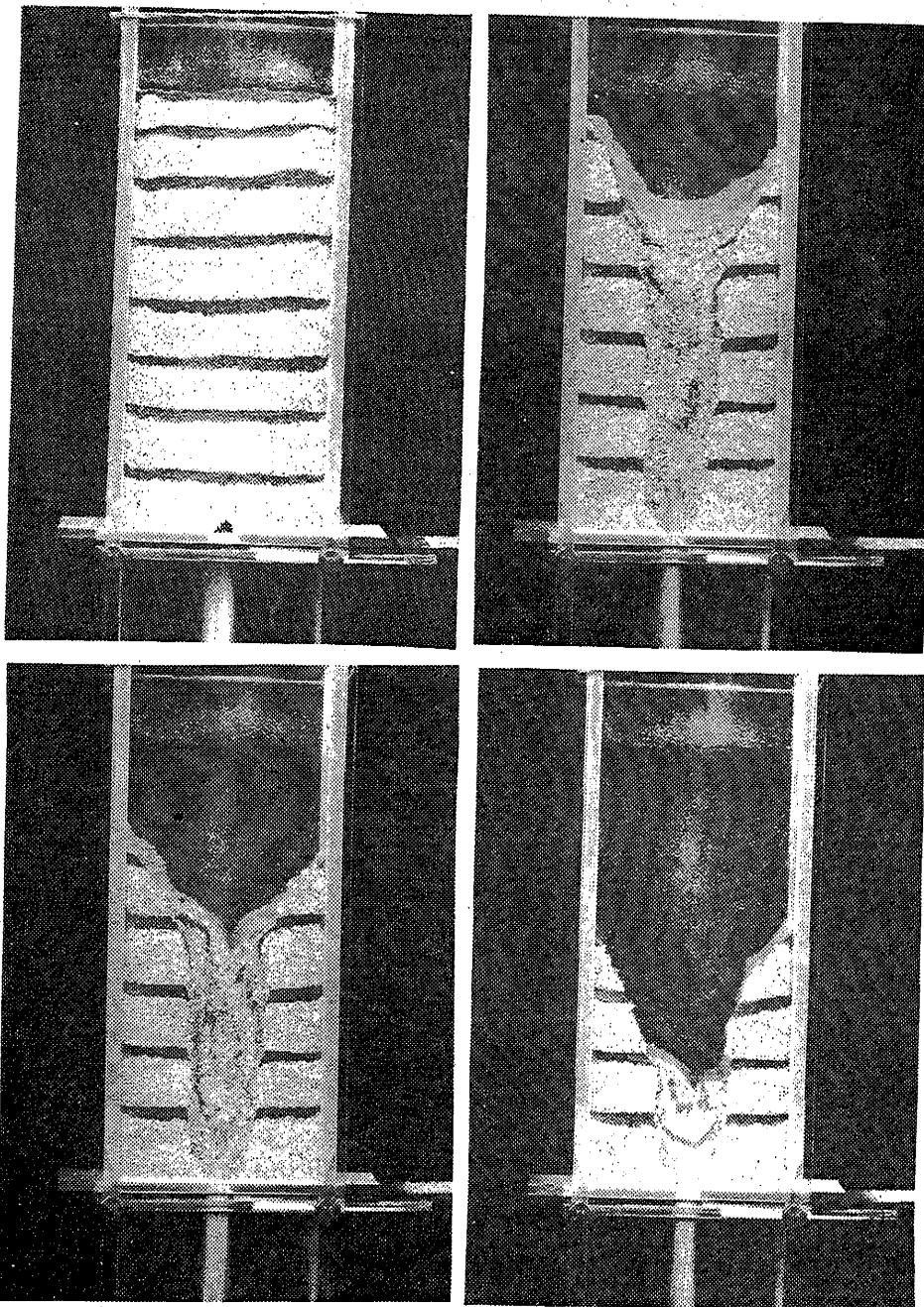
I hvileperioden sker der en sætning af mediet bl.a. på grund af udpresning af luft og en øget belastning fra ovenfor liggende materiale. Det varierende trykniveau giver anledning til forskelligt konsolideringsniveau i mediet og deraf følgende forskellige brudbetingelser.

Ved tømningen åbnes en lem i bunden af siloen. Hvis åbningen er stor nok, vil mediet begynde at strømme ned og ud. Bevægelserne vil starte forneden og efterhånden brede sig opad. Der skelnes traditionelt mellem to strømningstyper: massestrømning og tragtstrømning (på engelsk henholdsvis mass flow og funnel flow), se figur 13.1.1.

Ved massestrømning glider det meste af mediet i siloens lodrette del samlet nedad uden store relative bevægelser. Overfladen forandrer derved ikke form. I siloens kegledele deformeres massen, idet den samles til det langt mindre udløb. Mediet forlader derved siloen i samme rækkefølge, som det kom ind i den.



Figur 13.1.1 Massestrømning. Fra [81.2].



Figur 13.1.2 Tragtstrømning. Fra [81.2].

Ved tragtstrømning opstår en "tragt", dvs. et område nær midten af siloen fra udløbet til overfladen, hvori stort set al bevægelse sker. Strømningen går da fra overfladen gennem tragten og ud gennem udløbet, hvilket medfører, at det sidst påfyldte medium kommer først ud.

Hvilken strømningsform, mediet vil vælge, afhænger af mange ting, idet selv små utilsigtede ændringer kan medføre omslag fra en strømningsform til en anden.

Fra spændingsmålinger i siloer ved man, at trykket på et bestemt sted på væggen kan variere temmelig meget med tiden.

Når siloens udløb åbnes, kan det forekomme, at mediet ikke strømmer ud, idet der over udløbet står en "bro", som kan bære sig selv plus lidt tryk fra det ovenfor stående materiale. Dette er derved også i stand til at blive stående osv. Broen kan somme tider nedbrydes, ved at man banker på den, men en velfungerende silo skal have en åbning, som er så stor, at brodannelse undgås.

Som brudbetingelse for silomedier f.eks. korn anvendes ofte Coulombs brudbetingelse, formel (3.1), men det antages, at betingelsen afhænger af konsolideringen, dvs. lejringstætheden. Denne afhænger bl.a. af, hvilket tryk materialet maksimalt har været udsat for siden lejringen.

### 13.2 Mulige beregningsmodeller

Hvilke muligheder er der for at beskrive dette?

Man kunne opbygge en elastisk-plastisk model, hvori man følger fyldning, hvile og tømning. Hertil kræves foruden mediets elastiske og plastiske egenskaber kendskab til lejringen ved fyldning. Når spændings- og stivhedsvariationen i hviletilstanden er fundet (efter trinvis fyldning og med beregning af spændinger og flytninger), kan åbningen modelleres ved at bundlemmen i siloen flyttes et stykke nedad. Den mængde medium, der strømmer ud, kan formelt tænkes fjernet og lemmen igen indsat, hvorefter den atter flyttes et stykke ned osv. Bevægelserne styres således gennem udløbsmængden.

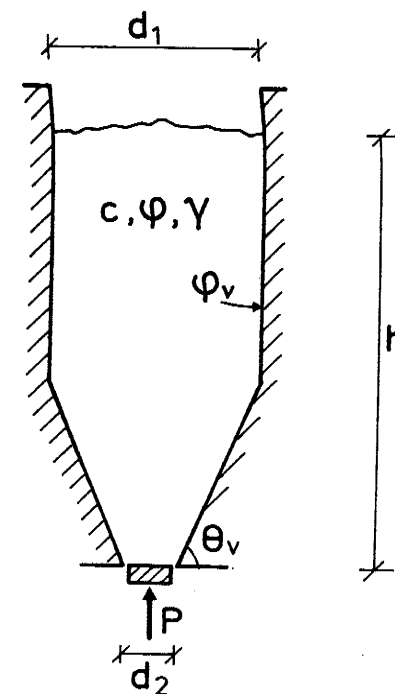
Efter udtømming af en del materiale nås muligvis en tilstand, hvor strømmingen bliver stationær, bortset fra de ændringer, som skyldes, at mængden af materiale i siloen aftager, og overfladen synker. Tilstanden bliver med andre ord kvasistationær. Denne tilstand kan man ønske at beskrive ved hjælp af plasticitetsteorien.

En anden tilstand, man kunne ønske at beskrive ved hjælp af plasticitetsteorien, er det øjeblik, hvor bundlemmen sænkes første gang, og bevægelsen starter.

I begge tilfælde er der begrænsninger på anvendelsen. Ved beskrivelsen af åbningsøjeblikket må man antage, at deformationerne hurtigt forplanter sig op igennem mediet til overfladen. Ved beskrivelsen af den kvasistationære strømning er dilatationen et problem. Da flydebetingelsen er Coulombs flydebetingelse med en positiv friktionsvinkel, vil de deformationer, mediet undergår under strømningen, ifølge plasticitetsteorien give en dilatation, som medfører en betydelig forøgelse af mediets volumen.

Ved deformationen vil det virkelige medium ifølge den såkaldte "critical state theory" [68.1] først undergå en vis begrænset volumenforandring og derefter flyde uden volumenændringer. Volumenforandringen kan være positiv eller negativ, afhængigt af lejringen før deformationen, og mediet siges da at have været over- eller underkonsolideret.

En plastisk formulering af opgaven er vist på figur 13.2.1:



Figur 13.2.1 Plastisk silobæreevneproblem.

Siloens geometri er givet ved følgende parametre:  $h$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\theta_v$ , vægruheden  $\phi_v$ , mediets rumvægt  $\gamma$  og dets flydebetingelse  $c, \phi$ . Cohæsionen  $c$  er lille sammenlignet med f.eks.  $\gamma d_1$  og negligeres ofte. Der søges den mindste værdi af bundtrykket  $P$ , som netop holder mediet i ro. Hvis bundtrykket bliver mindre end dette, starter strømningen. Samtidig søges spændingerne i mediet og flytningerne ved strømningen.

Formen på overfladen kan enten være givet, eller man kan søge den form, overfladen vil antage i løbet af tømningen. Bunden kunne også modelleres ved en konstant spænding i stedet for en konstant flytning.

Denne formulering dækker begge de tidligere nævnte tønnings-situationer: tilstanden ved tømningens begyndelse og den kvasistationære strømning ud af siloen.

Det antages først, at strømningen er en slags massestrømning, dvs. at der ikke findes større områder i siloen, hvor flytningen er nul. Tragtsstrømningen vil blive behandlet senere.

I siloens tragtformede del skal mediet presses sammen, så det kan passere ud gennem åbningen. Heraf følger, at den største trykhovedspænding i symmetrisnittet midt i siloen må være vandret, altså at der er passiv tilstand i mediet. (Passiv tilstand er den tilstand, hvor de omgivende vægge presser mediet sammen, og mediet (passivt) giver efter for dette pres.)

I den lodrette del af siloen sker der ikke en tilsvarende sammentrykning som i den tragtformede del. Hvis imidlertid normalitetsbetingelsen antages gældende i mediet, og flydningen ved væggen sker i mediet, vil den lodrette bevægelse give anledning til en vandret udvidelse. Hvis siloen ikke giver efter for denne udvidelse, må den modsvares af en vandret sammentrykning af mediet, dvs. det må være i passiv tilstand. Mediet vil altså i hele siloens højde være i passiv tilstand.

Langs væggen antages en dilatationsvinkel, som er mindre end friktionsvinklen, men stadig positiv. Mediet vil da stadig være i passiv tilstand i siloens lodrette del, og der vil stadig være tøjninger i mediet. Sammentrykningen, og dermed tøjningerne, vil dog blive mindre.

Hvis der sker en ren glidning langs væggen, dvs. hvis dilatationsvinklen her er nul, kan den lodrette bevægelse af mediet ske uden tøjninger heri. Mediet vil så ikke nødvendigvis være i passiv tilstand, men spændingerne vil være imellem passiv og aktiv tilstand, altså en elastisk tilstand. Dette er behandlet af Hartmann i [66.1].

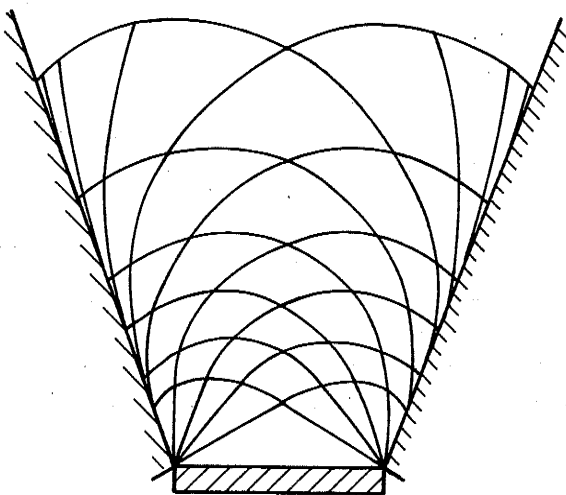
At det faktisk ofte forholder sig sådan, støttes af den iagttagelse, at spændingerne på silovæggen er meget følsomme over for forholdsvis små imperfektioner på silovæggen. Dette forklares ved, at mediet, når det passerer en indadgående bule, er tvunget til at gå over til passiv tilstand for at kunne deformeres, så det kan komme forbi bulen.

Ved en strømning langs væggen med glidning uden dilatation og samtidig en positiv friktionsvinkel langs væggen er normalitetsbetingelsen ikke opfyldt, og problemet kan da ikke umiddelbart behandles med den ideelle plasticitetsteori. En korrekt løsning kræver hensyntagen til den manglende opfyldelse af normalitetsbetingelsen langs væggen, samt en (delvis elastisk) bestemmelse af spændingerne i de dele af mediet, som ikke deformeres plastisk. At dette er nødvendigt, også for bestemmelse af spændingerne i siloens tragtformede del, ses således: Spændingerne på et vandret snit ved overgangen mellem den lodrette og den tragtformede del skal kendes; måske ikke i detaljer, men deres resultant skal i hvert fald kendes. Denne resultant er vægten af mediet i siloens lodrette del minus den del, som friktionen langs væggen bærer. Dette friktionsbidrag afhænger af trykket på væggen, dvs. af spændingerne i en del af mediet, som ikke er i flydning.

Om friktionsbidraget ved man ud fra plasticitetsteorien kun, at det ligger mellem de værdier, man vil få ved at antage passiv henholdsvis aktiv tilstand i mediet. I det følgende vil derfor kun disse situationer blive behandlet.

### 13.3 Beregning af sliplinjefelter i siloen

I siloens tragtformede del er mediet altid i passiv tilstand. Et eksempel på et sliplinjefelt for denne situation er vist på figur 13.3.1. Det opbygges fra neden og består først af



Figur 13.3.1. Passivt sliplinjefelt i silotragt.

en Rankine-zone, som dækker bundlemmen i siloen. Ved denne zones yderste hjørner er poler for to spiralzoner. Vifte-vinklen ved polerne afpasses, så den aktuelle flydebetingelse langs de skrå sider bliver opfyldt. Herefter opbygges feltet med udnyttelse af symmetrien og betingelsen langs væggen. Ved starten af beregningen indgår trykket på bunden.

Ved den praktiske beregning viser der sig problemer med at finde den rigtige løsning. Hvis rumvægten er tilstrækkelig lille, evt. nul, og bundtrykket tilstrækkelig stort, bestemmes sliplinjefeltets geometri uden nogen problemer. Det viser sig imidlertid, at trykket i mediet vokser meget hurtigt (eksponentielt) med højden over bunden. Løsningen er nemlig løsningen på et prop-udpresningsproblem af den type, der blev behandlet i kapitel 12, her blot med skrå sider og et bundtryk i stedet for cohæsionen.

Hvis derimod rumvægten er for stor eller bundtrykket for lille, vil spændingerne aftage lige over bunden. Der vil regningsmæssigt opstå trækspændinger større end  $c \cot \varphi$ , og nettet vil divergere. Dette betyder, at den nederste del af silomediet på trods af bundtrykket ikke kan bæres af det ovenfor liggende medium. Dette tilfælde, hvor tryk-  
ket vokser nedad, skal løses ovenfra ligesom det senere i dette kapitel behandlede problem at finde det passive tryk i siloens lodrette del.

Den rigtige løsning ligger på overgangen mellem de to tilstan-  
de. Det tilhørende bundtryk kan indkredses ved beregnings-  
forsøg, men sliplinjefeltet kan på grund af problemets diver-  
gerende natur ikke bestemmes ad denne vej.

Som antydnet ovenfor kan man også forsøge at bestemme spæn-  
dingerne ved at starte beregningen fra oven. Man kan nå  
et stykke på denne måde, men også her vil nettet divergere  
et sted, omend det ikke sker på samme voldsomme måde som  
i det tidligere nævnte tilfælde, hvor beregningen startede  
fra bunden med for lille bundtryk. Man kan i hvert fald ikke  
nå spiralpolerne ved bundlemmen eller noget, der ligner dem,  
uden at kende nogle bestemte startslip-linjer temmelig godt.

Man kan nå en løsning ad en anden vej foreslået af Jenike [64.1].  
I et område et stykke fra både udløbet og overgangen til siloens  
lodrette del antages en fast fordeling af spændingerne i hvert  
vandret snit, proportional med et spændingsniveau, som varierer  
med højden. Cohæsionen negligeres.

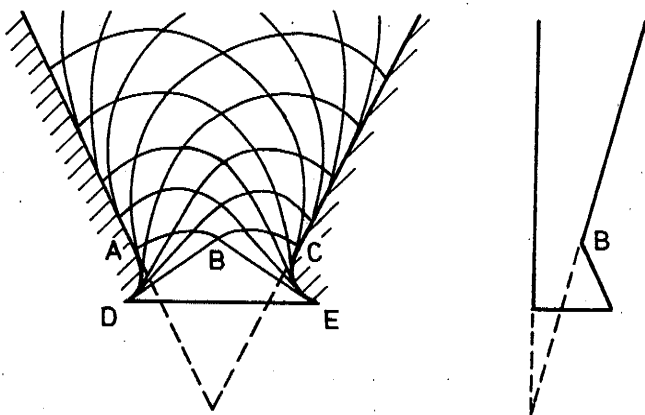
Der opstilles en lodret ligevægtsligning for en skive begrænset  
af to vandrette snit i keglen. En mulig løsning hertil er, at  
spændingsniveauet er proportionalt med rumvægten og afstanden  
fra keglens toppunkt. Hermed bliver også forudsætningen om en  
fast fordeling af spændingerne over tværsnittet opfyldt eksakt.  
Proportionalitetsfaktoren bliver en funktion af friktionsvinklen,  
vægfriktionsvinklen og væghældningsvinklen. På linjer gennem  
keglens toppunkt er spændingerne altså proportionale med afstanden

til dette punkt. Dette resultat fås både ved rotationssymmetrisk tilstand og ved plan deformationstilstand, altså både i en rund silo og i en "stribesilo".

Beregningen af spændingerne kan foretages ud fra spændingerne i midtersnittet, som beskrevet ved første begyndelsesværdiproblem i afsnit 5.2. Resultaterne heraf er udtrykt i den sidetrykspareparameter  $\lambda$ , der er indført i afsnit 12.2. Værdier af  $\lambda$  er givet i afsnit 12.3.

Denne løsning, hvor spændingerne aftager lineært mod nul i keglens toppunkt, svarer ikke til bundens geometri iflg. f.eks. figur 13.2.1. Den ville dog være den korrekte løsning, hvis bunden havde den på figur 13.3.2. viste geometri. Denne er fundet ved at erstatte feltet under ABC med en trekantet Rankinezone BDE lige over bundlemmen og to zoner, hvori det ene sæt sliplinjer i hver er rette. De herved fremkomne indhyllingskurver skal så være siloens vægge. Spændingen i midtersnittet vil beskrives ved de viste to rette linjer.

I den korrekte løsning vil sliplinjerne nær udløbet have et forløb noget lignende det, der fremgår af figur 13.3.1.



Figur 13.3.2. Mulig udløbsform og tilhørende spænding  $\sigma_x$  i midtersnit.

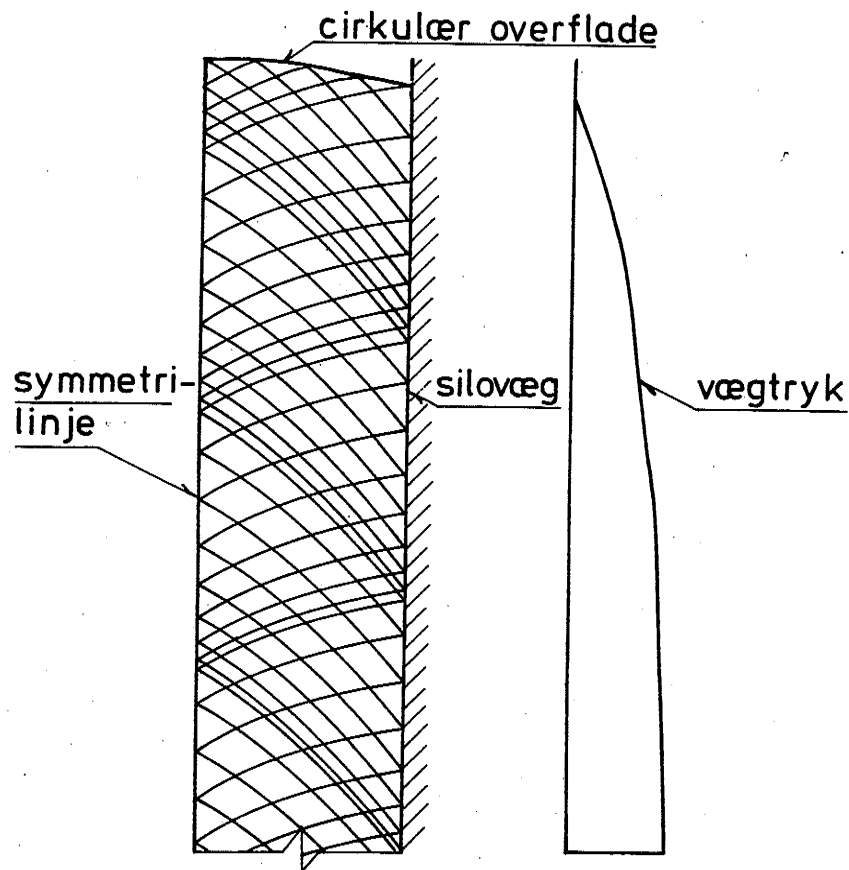
Spændingerne i silotragten må nødvendigvis afhænge af det tryk, der påføres ovenpå tragtens gennem det ovenfor liggende materiale. Ifølge de betragtninger, der er gjort til nu, vil trykket imidlertid kun afhænge af tragtens egen geometri, samt dens indhold. Svaret herpå er, at spændingerne øverst i tragtens er bestemt af det tryk, der udøves af det ovenfor liggende materiale. Følges trykket nedefter, vil det imidlertid nærme sig asymptotisk til den kurve, som er bestemt af silotragtens egne forhold. Denne trykvariation er undersøgt i afsnit 12.2. Her er differentialligningen for den lodrette ligevægt opstillet og løst. Trykket ved udløbet vil således være næsten uafhængigt af, hvor meget indhold, der er i siloen, indtil den er næsten helt tømt. Tømningshastigheden vil således også være næsten konstant. Dette bekræftes af talrige forsøg.

Løsningen med de lineært aftagende tryk i tragtens er således den korrekte løsning i en stor del af tragtens, men der vil være afvigelser ved toppen og ved bunden af tragtens.

I siloens lodrette del vil spændingerne ved overfladen af mediet være nul, og trykket vil så stige nedefter mod en asymptoteværdi, hvor friktionskræfterne på siderne af siloen netop bærer mediets egenvægt. Asymptoteværdien beregnes nemt ved hjælp af rumvægten og vægfriktionsvinklen. Heraf følger, at beregningen skal startes fra oven. På Figur 13.3.7 er vist et passivt sliplinjenet beregnet på denne måde.

Overfladen er valgt cirkulær, vandret i siloens midte og hældende udad ved væggen. Ved ikke at regne med vandret overflade er det undgået, at der skal anvendes en spændingsdiskontinuitetslinje, hvor overfladen møder væggen. Med disse startbetingelser er spændingerne beregnet et stykke ned i siloen. Der er regnet med  $\varphi = 30^\circ$  og  $\varphi_v = 15^\circ$ .

Der er regnet med plan deformationstilstand. Nettets geometri afhænger naturligvis af overfladens form, og afhængigt af hvordan denne er, vil sliplinjerne eventuelt skære hinanden et stykke nede i siloen. Dette betyder ikke, at beregningen er forkert, men hvis der skal regnes videre fra et sådant skæringspunkt, skal der indføres en spændingsdiskontinuitetslinje. En sådan er ikke medtaget i det

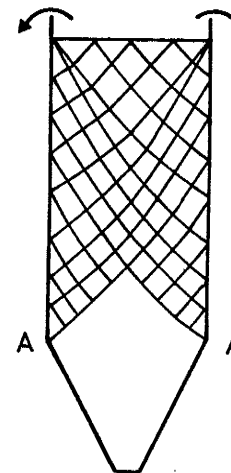


Figur 13.3.3 Sliplinjefelt og vægtryk i silo med passivt tryk.  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\varphi_v = 15^\circ$ . Plan deformationstilstand.

anvendte program . Trykket på væggen vokser som forventet fra nul op mod asymptoteværdien.

Som tidligere nævnt vil der ifølge den ideelle plasticitetsteori altid være passivt tryk i siloens lodrette del, hvis dens vægge er ueftergivelige og har en positiv friktions-

vinkel. Et aktivt tryk kan opstå, hvis væggene giver efter f.eks. som vist på figur 13.3.4 ved rotation udad om A. Hvis det er den begyndende tømning, der betragtes, jvf. kapitel 13.2, er der muligvis ikke noget forkert i at forestille sig en vis, begrænset eftergivelighed af siloens vægge. I praksis ses mange betonsiloer med revner; de har altså givet efter for presset.



Figur 13.3.4. Teoretisk mulighed for at realisere aktivt tryk.

Sammenlignet med det passive tilfælde vil vægtrykket vokse langsommere. De lodrette tryk et stykke nede i mediet vil derfor være større i det aktive tilfælde end i det passive.

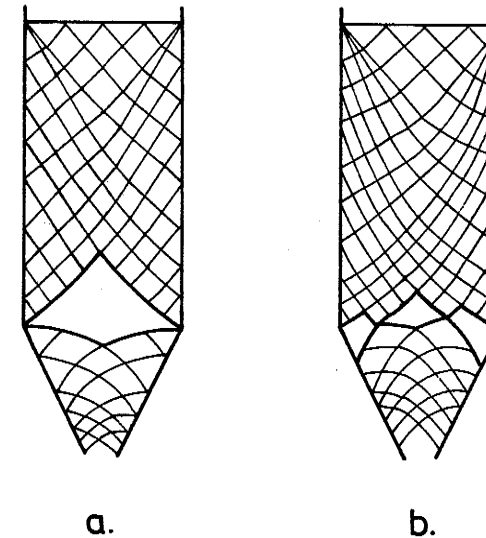
Begge tilfælde, passivt og aktivt tryk i siloens lodrette del, er behandlet i afsnit 12.2 og 12.3, hvor spændingsniveauet kan findes i enhver højde i siloen, når det blot kendes et sted i denne, f.eks. ved mediets ubelastede overflade.

Hvordan er overgangen mellem den lodrette del af siloen og keglekedlen? Dette spørgsmål må besvares i to dele, nemlig afhængigt af om der antages passivt eller aktivt tryk i siloens lodrette del.

Først behandles det passive tilfælde. Hvis spændingerne i siloens midte antages konstante over et bestemt punkt og lineært aftagende under dette punkt, kan et sliplinjefelt beregnes. I dette felt kan man indlægge en kurve, der overalt danner den samme vinkel med sliplinjerne og altså svarer til en bestemt vægfriktionsvinkel. Hvis silovæggen fulgte denne kurve, var løsningen den rigtige. I andre tilfælde er løsningen ikke helt korrekt. Ved at forsøge sig frem med en anden overgang mellem de to retlinede forløb af trykket i midten af siloen vil man kunne ændre den kurve i feltet, hvor vægfriktionsbetingelsen er opfyldt.

Man vil dog ikke kunne ramme den ideelle siloform, som har et knæk ved overgangen mellem den lodrette del og keglen. I den korrekte løsning vil der formodentlig være en krum grænsesliplinje, som forbinder den lodrette og den skrå væg. Uden for denne sliplinje vil der ikke være flytninger. Forskellen mellem spændingerne i den korrekte og den tilnærmede løsning er næppe særlig stor.

I det aktive tilfælde er der flere muligheder. Hvis vægruheden ikke er for stor, og væghældningen ikke er for lille, vil der formentlig være et stift område i siloen ved overgangen, se figur 13.3.5a.



Figur 13.3.5 Mulige overgange mellem lodret silodel med aktivt tryk og kegleformet del.

De yderste sliplinger i de to adskilte felter på figur 13.3.5a mødes ved overgangen mellem siloens lodrette og skrå dele. En betingelse for, at felterne ikke griber ind i hinanden er, at den øverste af de to sliplinger er stejlere end den nederste. Ved den højre væg betyder dette, idet  $\phi$  er første hovedspændingsretningsvinkel og index a og p betyder henholdsvis aktiv og passiv, at

$$\phi_a - \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} < \phi_p - \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

Det kan vises ved hjælp af formel (5.11.1), at denne betingelse er ensbetydende med, at

$$\sin \phi_v < \sin \phi \sin \phi_v \quad (13.3.1)$$

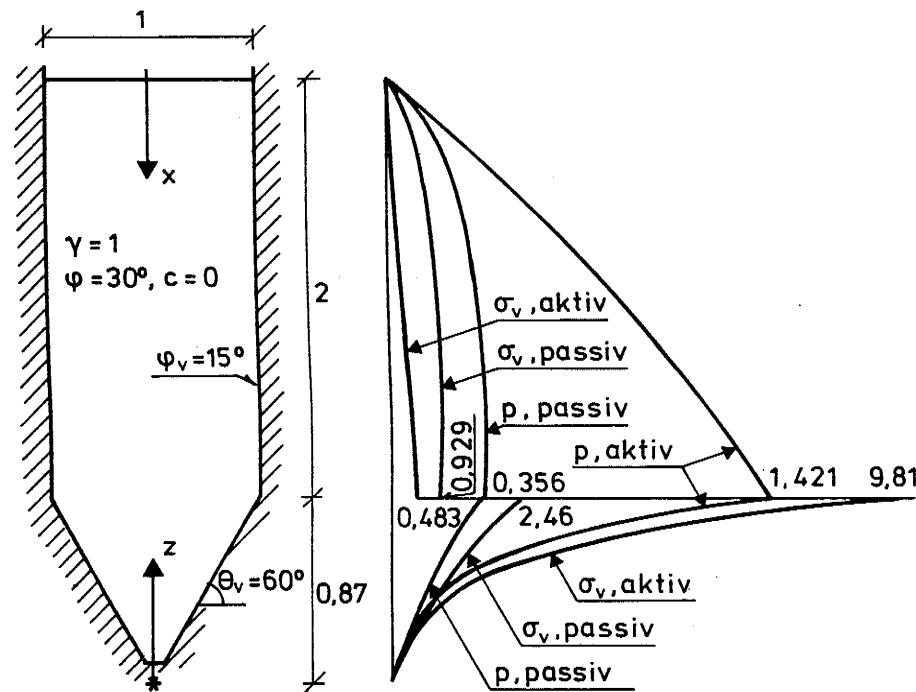


Hvis (13.3.1) ikke er opfyldt, griber de to zoner ind i hinanden. I stedet for denne overlappning kan zonerne adskilles af en spændingsdiskontinuitetslinje, som udgår fra knækket i siloens væg, se figur 13.3.5b. Det stive legeme bliver hermed noget mindre.

For at kunne deformere sliplinjefelterne på figur 13.3.5 må man som tidligere nævnt forudsætte, at de lodrette vægge giver efter. Samtidig hermed er der mulighed for udtømmning i bunden af siloen. Et større eller mindre legeme vil bevæges stift nedad, og der vil på figur 13.3.5b være stive legemer ved silovæggens knæk, der ikke flyttes.

Den samlede silo kan behandles tilnærmet ved at behandle den lodrette del og kegledelen hver for sig ved hjælp af formlerne i afsnit 12.2 og 12.3. Ved overgangen mellem de to dele kræves kontinuitet i middeltrykket på et vandret snit. Dette opnås ved at den værdi, der er bestemt af den lodrette del, overføres til kegledelen som startværdi. Et eksempel herpå er vist i det følgende.

Det fremgår af eksemplet, at  $\lambda$ -værdien i siloens lodrette del har en meget stor indflydelse på trykket i tragtens øverste del. Dette bliver størst, når der er aktivt tryk i siloens lodrette del. Da trykket her som tidligere nævnt ligger imellem aktivt og passivt tryk, er antagelsen om rent aktivt tryk i siloens lodrette del den mest konservative (forsigtige) antagelse, man kan gøre med hensyn til vurdering af belastningerne på tragten.



Figur 13.3.6 Eksempel på rund silo, samt middeltryk på vandrette snit  $p$  og vægtryk  $\sigma_v$ . (Bemærk, at målestokkene for  $p$  og  $\sigma_v$  er forskellige).

Eksempel

På figur 13.3.6 er vist et eksempel på en rund silo. Spændingerne heri skal bestemmes under forudsætning af dels passivt, dels aktivt tryk i siloens lodrette del.

Lodret del: Passivt tryk:  $\lambda$  fås enten af figur 12.3.3 eller af formel (12.3.11):

$$\lambda_p = 2.61 \tan 15^\circ = 0.70$$

Aktivt tryk: formel (12.3.11) giver med  $\varphi = -30^\circ$  og  $\varphi_v = 15^\circ$ :

$$\lambda_a = 0.091$$

Kegleled: Af figur 12.3.4 aflæses:

$$\lambda = 1.85$$

Lodret del:  $r_h = 0.25$ ,  $p_0 = 0$ ,  $a = 0$ . Formel (12.2.2) giver:

$$p = \frac{\gamma r_h}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{r_h} x}\right)$$

Passivt tryk:

$$p = \frac{1 \cdot 0.25}{0.70} \left(1 - e^{-\frac{0.70}{0.25} x}\right) = 0.357(1 - e^{-2.8 x})$$

$$p(x=2) = 0.356$$

Tryk på væggen:

$$\sigma_v = p \frac{\lambda}{\tan \varphi_v}$$

$$\sigma_v(x=2) = 0.356 \frac{0.70}{\tan 15^\circ} = 0.929$$

Aktivt tryk:

$$p = \frac{1 \cdot 0.25}{0.091} x \left(1 - e^{-\frac{0.091}{0.25} x}\right) = 2.75(1 - e^{-0.364 x})$$

$$p(x=2) = 1.421$$

$$\sigma_v(x=2) = 1.421 \cdot \frac{0.091}{\tan 15^\circ} = 0.483$$

$$\text{Kegleled: } r_0 = \frac{A/z^2}{S/z} = \frac{\pi/4 \cdot 1^2/0.87^2}{\pi \cdot 1/0.87} = 0.287.$$

Formel (12.2.5) giver:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\gamma r_0 z}{\lambda - 3r_0} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{\lambda - 2r_0}{r_0}} \left(p(x=2) - \frac{\gamma r_0 z_0}{\lambda - 3r_0}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 0.287}{1.85 - 3 \cdot 0.287} z + \left(\frac{z}{0.87}\right)^{\frac{1.85 - 2 \cdot 0.287}{0.287}} (p(x=2) - \frac{1 \cdot 0.287 \cdot 0.87}{1.85 - 3 \cdot 0.287}) \\ &= 0.290 z + \left(\frac{z}{0.87}\right)^{4.45} (p(x=2) - 0.252) \end{aligned}$$

Tryk ved væggen på lodrette snit:

$$\sigma_v = p \frac{\lambda}{\tan \varphi}$$

Ved passivt tryk i den lodrette del fås:

$$\sigma_v(z=0.87) = 0.356 \cdot \frac{1.85}{\tan 15^\circ} = 2.46$$

Ved aktivt tryk fås:

$$\sigma_v(z=0.87) = 1.421 \cdot \frac{1.85}{\tan 15^\circ} = 9.81$$

Spændingerne er iøvrigt vist på figur 13.3.6.

#### 13.4 Tragtrømning

Som tidligere nævnt ses der i praksis to forskellige strømningssformer i siloer, nemlig massestrømning og tragtrømning. Ved tragtrømning sker al bevægelse i en "tragt", et område nær midten, hvorigennem materiale fra overfladen strømmer direkte ned og ud af udløbet. Hvilken strømningssform, en given silo vil vælge, afhænger af mange ting, bl.a. af silotragtens hældningsvinkel,  $\theta_v$  og ruhed  $\varphi_v$ . Hvis  $\theta_v$  er for lille eller  $\varphi_v$  for stor, er der for stor modstand til, at strømningen kan "brede sig" ud i hele siloens tværsnit. Materialet over bundlemmen vil blot "falde ud", hvorved det ovenfor liggende materiale følger efter osv. op til overfladen.

Ifølge plasticitetsteorien må grænsen for tragten, der jo er en flytningsdiskontinuitetslinje på grænsen mellem et område uden plastiske deformationer og et med sådanne, opfylde en af følgende to betingelser:

1. For at mediet i røret kan deformeres, skal tragstens grænse være indhyllingskurve for det ene sæt sliplinjer i røret.
2. Flydebetingelsen langs røret er svagere end i mediet i røret.

I det første tilfælde vil flydebetingelsen langs røret være den samme som i mediet i røret. Det er jvf. kapitel 5.6 ikke muligt at finde spændinger i ligevægt uden for røret, som ikke overskrider flydebetingelsen. Mediet uden for røret må da være stærkere end i røret.

I det andet tilfælde kan der findes spændinger uden for røret, som er i ligevægt og ikke overskrider flydebetingelsen, men flydebetingelsen for rørets overflade må være svagere end den i mediet i røret.

I begge tilfælde er altså flydebetingelsen uden for røret stærkere end flydebetingelsen langs rørets overflade. Tragtrømning kan altså kun lade sig gøre i et inhomogent medium.

Det er til gengæld heller ikke svært at forestille sig de nødvendige inhomogeniteter. Når tømningen starter, sker der en aflastning af mediet. Det vil da være overkonsolideret. Når et overkonsolideret medium deformeres, vil det dilatere, og rumvægten vil formindskes. Spændingerne vil stige til en høj værdi, hvorefter de vil falde til et lavere "flydeniveau". Denne forskel på det "statiske" og den "dynamiske" styrke medfører netop, at det strømmende medium i tragten er svagere end det stillestående uden for den. Den fortæller også, at tragten vil være ret stabil; kun det svageste materiale vil deformeres. Endelig forklarer denne styrkebarriere, der skal overvindes, at så lidt materiale som muligt deltager i bevægelserne. Når bevægelserne efter åbningen af bundlemmen breder sig opad i stedet for både opad og udad, vil netop mindre mængder af siloens indhold blive berørt.

### 13.5 Konklusion

Mulighederne og begrænsningerne for anvendelse af plasticitetsteori til bestemmelse af spændingerne i et silomedium under udtømmning er behandlet.

At mediets styrke afhænger af lejringen, dvs. af fyldningsmetoden og konsolideringstrykket udelukker ikke en plastisk løsning på strømningsproblemet. Kender man styrkens afhængighed af disse ting, skal man blot regne med, at den varierer fra sted til sted. Tilsvarende gælder den anisotropi, som følger af fyldningen og sætningen af mediet. Anisotropien behandles på den måde, at styrken i et snit i materialet afhænger af snittets retning. Dette kan også indbygges i en plastisk model.

Et større problem er forskellen på de "statiske" og "dynamiske" styrker, som muliggør forskellige strømningsformer afhængigt af udviklingen ved starten af strømningen. Dette er ikke et plastisk problem, da strømningsformen afhænger af forskellen mellem den maksimale (statiske) styrke og flydestyrken (den dynamiske styrke). Hvis denne forskel ikke fandtes, ville al strømning være massestrømning.

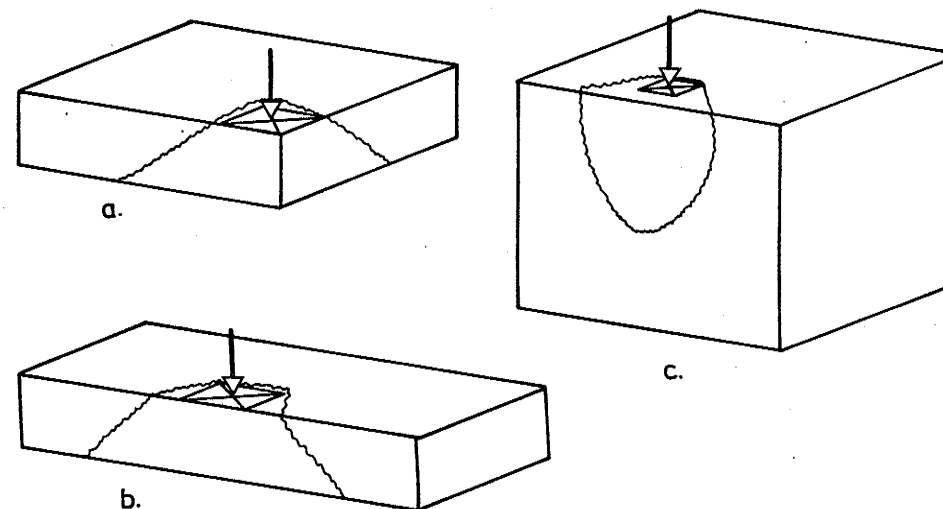
Spændingerne i siloens nederste tragtformede del beskrives udmærket ved plasticitetsteorien, da der er flydning i stort set alt materialet. I siloens lodrette del kan plasticitetsteorien dog kun give ydergrænser for spændingerne, nemlig aktivt og passivt tryk, hvorimellem trykket ved masseudstrømning må ligge.

Med sliplinjeberegninger kan visse karakteristiske fænomener undersøges, og principper for løsningen kan findes. Det er imidlertid vanskeligt at tilpasse løsningen til et aktuelt problems nøjagtige forhold. Her er der nok større muligheder ved anvendelse af andre (dyrere) numeriske metoder.

## 14 Rumlige stiftlegemebevægelser

### 14.1 Indledning

Mens den øvrige del af denne rapport handler om problemer, der kan beskrives i en plan, dvs. plane og rotationssymmetriske konstruktioner, skal der i dette kapitel siges noget om, hvordan man kan behandle opgaver, der ikke lader sig formulere sådan. Eksempler på sådanne opgaver ses på figur 14.1.1: gennemlokning (afbrækning) af et hjørne på en plade, gennemlokning ved en kant af en plade, belastning inden for et lille areal (både bredde og længde er begrænsede) på et betonlegeme nær en kant af dette.



Figur 14.1.1 Rumlige brudformer. a. gennemlokning af pladehjørne. b. gennemlokning ved pladerand. c. koncentreret belastning nær kant af betonlegeme.

I sådanne tilfælde kan det være meget vanskeligt at finde gode nedreværdiløsninger uden et stort regnearbejde. Den letteste måde at nå frem til en brugbar løsning synes derfor at være øvre-værdimetoden anvendt på mekanismer med et stift legeme, der bevæges. I enkelte tilfælde kan dette legeme selv spaltes, så der bliver to bevægede stive legemer.

De enkelte stive legemer afgrænses af flytningsdiskontinuitetsflader. Fordi flytningsdiskontinuitetsflade er et meget langt ord, kaldes det i resten af dette kapitel flydeflade, analogt med en flydelinje i plane opgaver. Denne tredimensionale flydeflade må ikke forveksles med den (hyper-) flade i spændingsrummet, som også kaldes flydefladen. En flydeflade er et lag af meget lille tykkelse. Som det er nævnt i kapitel 3, er der plan deformationstilstand i dette lag, og dissipationen pr. arealenhed er

$$d_A = \frac{\delta f_c}{2} (\lambda - \mu \sin \alpha) \quad (14.1.1)$$

Her er  $\delta$  flytningsdiskontinuitetens størrelse og  $\alpha$  dens vinkel med flydefladen.  $f_c$  er materialets trykstyrke, og  $\lambda$  og  $\mu$  er parametre, der indeholder materialets friktionsvinkel og den reducerede trækstyrke. De er givet i formel (3.10). Til bevægelsen er knyttet kravet, at  $\alpha \geq \varphi$ . For  $\alpha = \varphi$  udgår trækstyrkens indflydelse, og (14.1.1) bliver til

$$d_A = \frac{\delta f_c}{2} (1 - \sin \varphi) \quad (14.1.2)$$

Den totale dissipation i en mekanisme fås ved at integrere  $d_A$  over alle flydefladerne:

$$D = \int_A d_A dA \quad (14.1.3)$$

Da der er tale om øvregrænser, dvs. bæreevnebestemmelser på den usikre side, skal man søge de flydeflader og tilhørende stiftlegemebevægelser, der for en fastholdt værdi af det ydre arbejde giver den mindste totale dissipation. Undersøgelsen af disse flader deler sig naturligt i to afsnit, nemlig dem, hvor  $\alpha$  er lig med  $\varphi$ , afsnit 14.2, og dem, hvor  $\alpha$  er større end  $\varphi$ , afsnit 14.3.

#### 14.2 Flydeflader i ægte Coulomb-materiale

For et ægte Coulomb-materiale vil det almindeligvis gælde, at  $\alpha$  er lig med  $\varphi$ . Undtagelsen er spidsen på flydefladen i en  $\sigma$ -plan, dvs. rent (hydrostatisk) træk. For et modificeret Coulomb-materiale kan der også forekomme flydeflader med  $\alpha = \varphi$ . Her er det imidlertid kun én mulighed blandt flere. Den vil forekomme, når forholdene ikke tillader en for stor udbredelse af flyde-

fladerne. Jo større  $\alpha$  er, jo længere vil nemlig flydefladerne brede sig ud "til siden" i forhold til brudretningen.

For  $\alpha = \varphi$  gælder (14.1.2). Den kan omformes ved hjælp af (3.3) og (3.4) til

$$d_A = \delta \sin \varphi c \cot \varphi = \delta \sin \varphi \frac{f_c}{k-1} \quad (14.2.1)$$

Når (14.2.1) integreres over flydefladen, kan faktoren  $\sin \varphi$  knyttes til arealet  $dA$ , som herved bliver det areal, der fås ved at projicere arealelementet ind på en plan vinkelret på flytningsdiskontinuitetsretningen. Produktet af dette areal og flytningsdiskontinuiteten er dilatationen, den volumenudvidelse, der finder sted ved flytningen. Ved integrationen summeres bidragene fra alle flydefladerne til volumenudvidelsen. Kaldes den totale volumenudvidelse  $\Delta V$ , er den totale dissipation

$$D = \Delta V c \cot \varphi = \Delta V \frac{f_c}{k-1} \quad (14.2.2)$$

Hvis man kender flytningen og udstrækningen af de i mekanismen indgående stive legemer, er det let at beregne den totale volumenudvidelse, blot ved at se på bevægelserne af de frie overflader af de bevægede legemer. Man undgår altså at skulle udføre endnu en integration langs flydefladerne, men kan nøjes med at fastlægge deres forløb ved de frie overflader.

Materialer med friktionsvinklen nul danner en undtagelse fra denne regel. Da  $\Delta V = 0$ ,  $\cot \varphi = \infty$  og  $k = 1$ , kan (14.2.2) ikke bruges. Dissipationen må her bestemmes enten direkte ved integration af (14.1.1) eller ved anvendelse af en lille værdi for  $\varphi$  gående mod nul.

Da dissipationen ifølge (14.2.2) er proportional med  $\Delta V$ , skal denne gøres så lille som mulig. Brudfladerne skal derfor føre fra lastpåførslen til de frie overflader "så direkte som muligt", med "så lille spredning som muligt". I det følgende skal vises, hvordan en brudflade "forlænges" i bevægelsens retning fra et givet snit vinkelret på bevægelsen. Opgaven lyder således:

Der søges den flydeflade, der adskiller et legeme, der bevæges, fra et, der står stille. Bevægelsen er en rotation om en given linje. Om flydefladen er kun givet, at den i et bestemt snit

gennem rotationsaksen ses som en cirkel (som ikke skærer rotationsaksen). Vinklen  $\alpha$  mellem flytning og flydeflade skal overalt være lig med  $\varphi$ .

Snit, som ikke er cirkulære, behandles senere.

Løsningen hertil er vist på figur 14.2.1. Den består af et "overflødigshorn" udgående fra en spids. I ethvert snit gennem omdrejningsaksen er fladen en cirkel. På figur 14.2.1 er indlagt et retvinklet xyz-koordinatsystem med z-aksen i omdrejningsaksen og x-aksen gennem fladens spids. I xy-planen er fladens konturer to logaritmiske spiraler med stigningsvinkel henholdsvis  $\varphi$  og  $-\varphi$ . Indføres cylinderkoordinaterne  $r$  og  $\theta$  gennem  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ; får de to spiraler parameterfremstillingerne

$$r_1 = x_0 e^{\theta \tan \varphi}; \quad z = 0 \quad (14.2.3)$$

$$r_2 = x_0 e^{-\theta \tan \varphi}; \quad z = 0 \quad (14.2.4)$$

Centrum til de omtalte cirkler, der ses som linjestykker i xy-planen, ligger midt mellem de to spiraler:

$$r_c = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = x_0 \cosh(\theta \tan \varphi), \quad z_c = 0 \quad (14.2.5)$$

Radius i cirklerne bliver

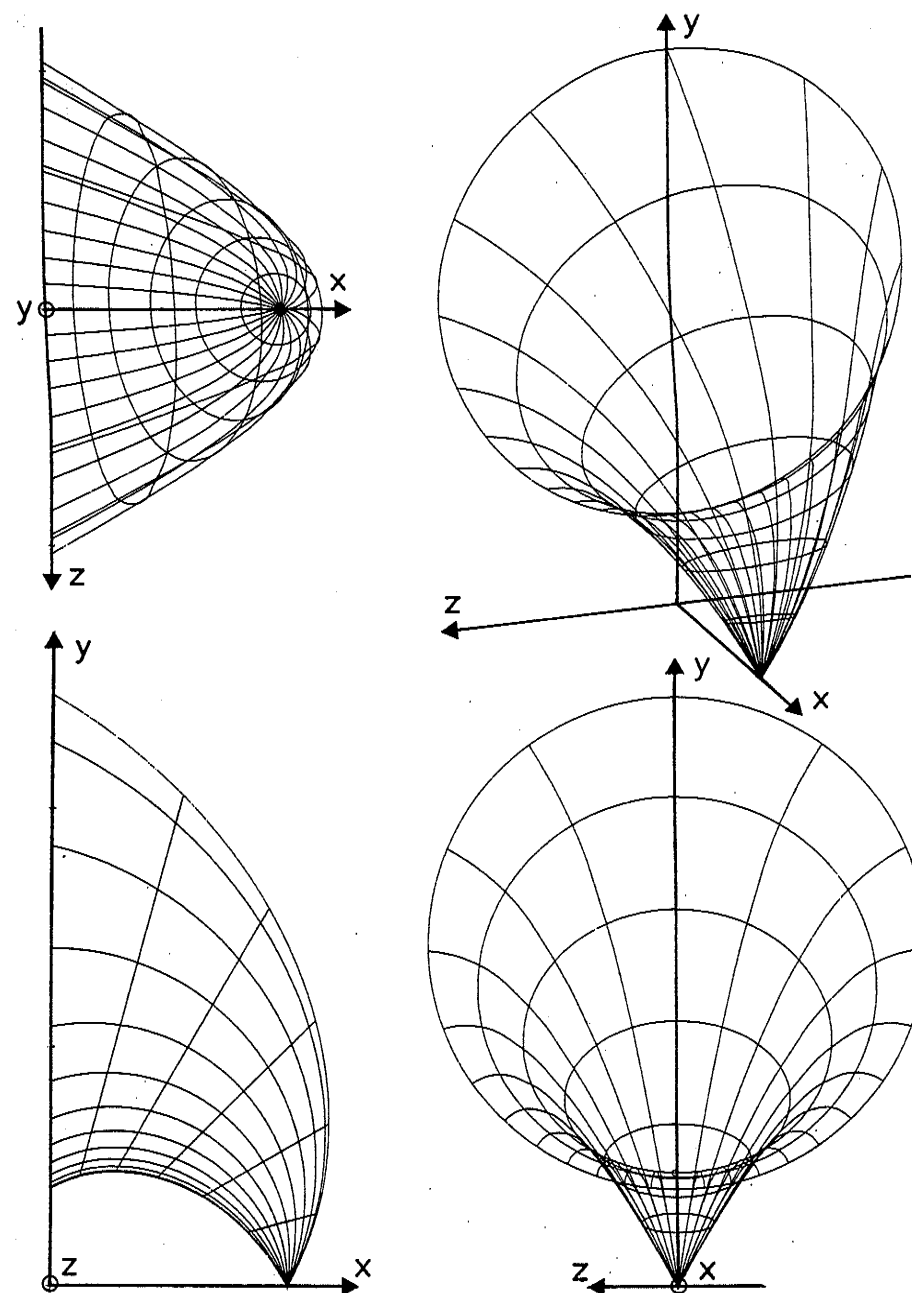
$$a = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) = x_0 \sinh(\theta \tan \varphi) \quad (14.2.6)$$

Alle fladens tangentlinjer gennem spidsen danner vinklen  $\varphi$  med en linje gennem spidsen parallel med y-aksen.

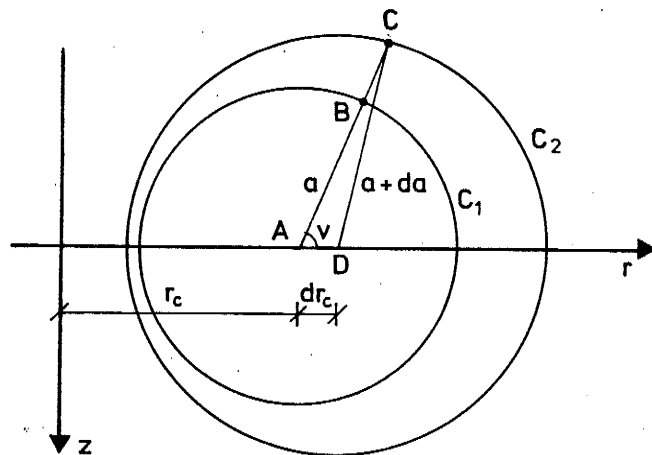
Hermed er løsningen beskrevet, men det er naturligvis ikke bevist, at den er den rigtige løsning. Dette sker i det følgende.

Først skal det vises, at alle snit gennem fladen og omdrejningsaksen er cirkler. Senere vil de enkelte frembringere blive fundet.

På figur 14.2.2 er vist to infinitesimalt tætliggende snit gennem omdrejningsaksen, z-aksen. I det første snit antages flydefladen kendt, nemlig cirklen  $C_1$ . Det andet snit er drejet vinklen  $d\theta$  om z-aksen i forhold til det første.



Figur 14.2.1 Rumlig flydeflade ved rotation om z-aksen. På tegningen er anvendt  $\varphi = 30^\circ$ .



Figur 14.2.2 Snit gennem flydefladen og omdrejningsaksen.

Da afstanden mellem de to snitplaner ved et punkt B på  $C_1$  er  $r d\theta$ , skal afstanden fra  $C_1$  til den nye kurve  $C_2$  målt på figur 14.2.2 være  $\tan\theta$  gange denne afstand, dvs.  $r d\theta \tan\theta$ .

Ved projektion på AB fås:

$$|AB| + |BC| = |AD| \cos v + |DC| \cdot$$

$$a + (r_c + a \cos v) d\theta \tan\theta = dr_c \cos v + (a + da) \cdot$$

$$r_c d\theta \tan\theta - da + (a d\theta \tan\theta - dr_c) \cos v = 0 \quad (14.2.7)$$

Vælges forsøgsvis

$$dr_c = a d\theta \tan\theta \quad (14.2.8)$$

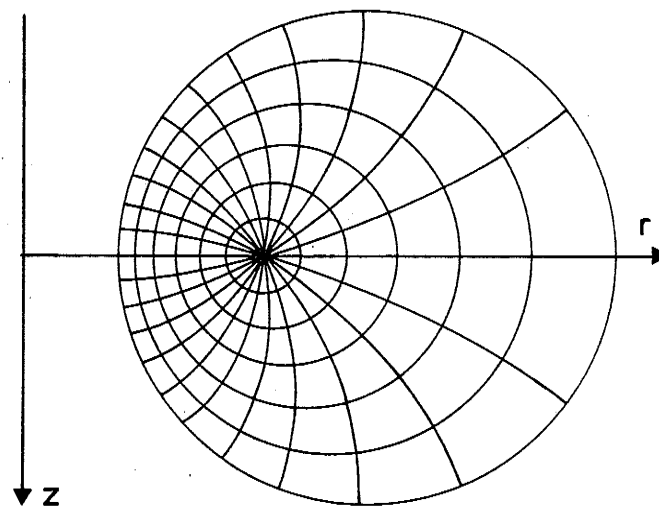
fås af (14.2.7)

$$da = r_c d\theta \tan\theta \quad (14.2.9)$$

Da den nye radius med det valgte centrum bliver uafhængig af  $v$ , er  $C_2$  også en cirkel. Hermed er det vist, at flydefladen i alle snit gennem omdrejningsaksen er en cirkel. Det ses i øvrigt ved indsættelse, at de i (14.2.5) og (14.2.6) postulerede værdier af centerafstand og radius opfylder (14.2.8) og (14.2.9). Hermed er også (14.2.3) og (14.2.4) bevist, da  $r_1 = r_c + a$  og  $r_2 = r_c - a$ .

Vi vil nu betragte et lille stykke af flydefladens skæring med en plan gennem omdrejningsaksen og se, hvilken flydeflade, dette stykke fastlægger. Vi søger med andre ord flydefladens frembringere. På figur 14.2.2 sås det, at punkt B bestemte punkt C som et punkt på normalen til  $C_1$  og i en bestemt afstand fra B. Frembringerne vil altså skære cirklerne i rette vinkler. Foretager man en "cylinderprojektion" af flydefladen på figur 14.2.1, dvs. afbilder man alle snit gennem omdrejningsaksen i én plan og med omdrejningsaksen som én linje, får man figur 14.2.3. Flydefladens frembringere afbildes nu i kurver, der overalt står vinkelret på flydefladens cirkler. De kurver, for hvilke dette gælder, er selv cirkler alle med centrum på  $z$ -aksen og alle gående igennem punktet  $(r, z) = (x_0, 0)$ . Dette er en følge af, at det for alle flydefladens cirkler ifølge (14.2.5) og (14.2.6) gælder

$$r_c^2 - a^2 = x_0^2 \quad (14.2.10)$$

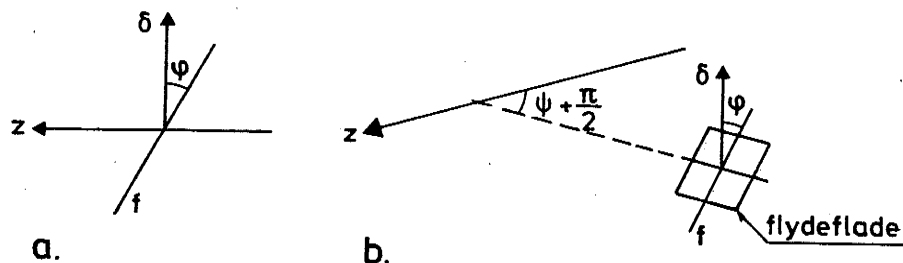


Figur 14.2.3 "Cylinderprojektion" af flydefladen på figur 14.2.1.

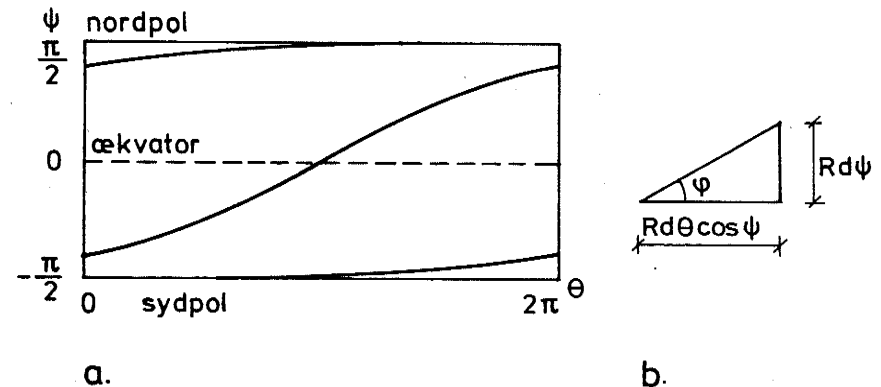
At frembringerne er cirkler på figur 14.2.3, betyder, at alle punkter på en bestemt frembringer ligger i samme afstand fra et bestemt punkt på omdrejningsaksen. Dette punkt findes ud fra et vilkårligt punkt på frembringeren ved her at forlænge tangenten til flydefladens cirkel til skæring med omdrejningsaksen. Eller med andre ord: Det er det punkt, hvor flydefladens tangentplan i et vilkårligt punkt på frembringeren skærer omdrejningsaksen.

Da enhver frembringer har konstant afstand til et punkt på omdrejningsaksen, må det ligge på en kugleflade med dette punkt som centrum. Et snit i flydefladen vinkelret på en sådan radius er vist på figur 14.2.4a. Bemærk, at z-aksen ikke er parallel med snittet. Flydefladens tangentplan projiceres her i frembringerens tangent. Der skal være en vinkel af størrelsen  $\varphi$  mellem flytning og flydeflade. Flytningen står naturligvis vinkelret på omdrejningsaksen. Der skal derfor være den viste vinkel  $\varphi$  mellem frembringeren og omdrejningsaksens normal på figur 14.2.4. Da figuren viser en tangentplan til den kugleflade, som indeholder frembringeren, er det nu muligt at bestemme frembringeren:

Frembringeren er den vej, et skib ville følge, hvis det på en vanddækket jordklode sejlede med en konstant kurs:  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . (Kursen er vinklen fra nord-retningen til sejlretningen, målt positivt mod øst). Man kunne kalde denne kurve en kuglespiral.



Figur 14.2.4 a. Normalsnit i flydeflade med frembringeren f som tangent. b. Rumligt billede af det samme.



Figur 14.2.5 Bestemmelse af "kuglespiral".

Stedet på kuglen beskrives ved de to vinkler  $\theta$  (længdegraden), vinklen fra zx-planen til planen gennem z-aksen og punktet, positivt mod y-aksen, og  $\psi$  (breddegraden), vinklen fra xy-planen til linjen gennem centrum og punktet, positivt mod z-aksen. Kaldes kuglens radius R, gælder

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \psi \cos \theta \\ y &= R \cos \psi \sin \theta \\ z &= R \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (14.2.11)$$

På figur 14.2.5b er vist et udsnit af kurven og de dertil hørende infinitesimale tilvækster til  $\theta$  og  $\psi$ . Af figuren fås

$$R d\theta \cos \psi \tan \varphi = R d\psi$$

$$d\theta \tan \varphi = \frac{d\psi}{\cos \psi}$$

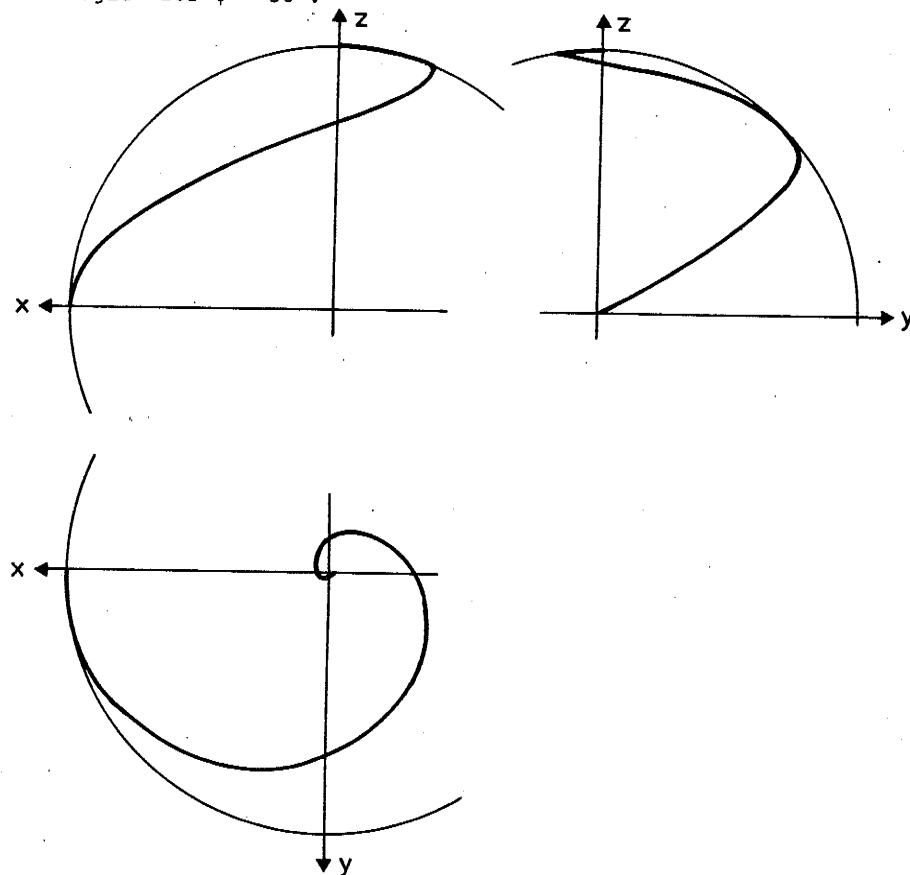
Ved integration heraf fås

$$\theta = \frac{1}{\tan \varphi} \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \right) + \theta_0 \quad (14.2.12)$$

$$\psi = 2 \arctan \left( e^{(\theta - \theta_0) \tan \varphi} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (14.2.13)$$



En sådan kuglespiral er vist på figur 14.2.6 på den "nordlige halvkugle" for  $\varphi = 30^\circ$ .



Figur 14.2.6 Kuglespiral,  $\varphi = 30^\circ$ .

Det er disse frembringere, der sammen med cirklerne viser flydefladen på figur 14.2.1. Man bemærker, at mens de nær spidsen var jævnt fordelt langs cirklerne, er de et stykke herfra koncentreret langs den del af cirklerne, der er nærmest omdrejningsaksen.

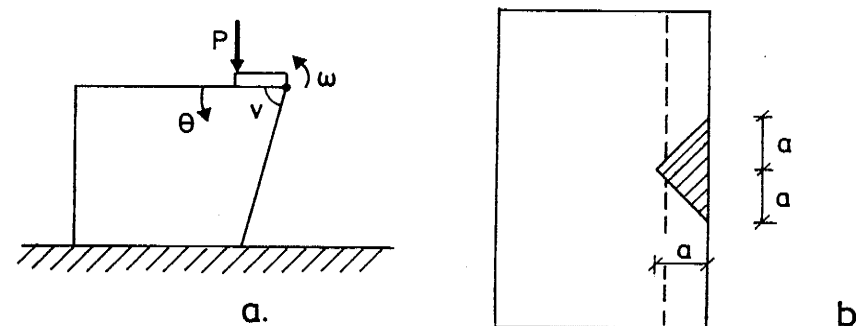
Det er nu vist, hvordan tangenten til flydefladen i et snit gennem omdrejningsaksen bestemmer en frembringer med tilhørende tangentretninger i andre snit gennem omdrejningsaksen.

Hvis flydefladen i et snit gennem omdrejningsaksen indeholder et linjestykke, kan dette karakteriseres som en kurve, hvor tangenten er fælles for alle punkter. Den tilhørende tangent i andre

snit vil da også være fælles. Den retlinede del vil med andre ord frembringe retlinede dele i alle snit gennem omdrejningsaksen, og alle disse rette linjer vil gå igennem det samme punkt på omdrejningsaksen.

Med det, der nu er gennemgået, kan alle flydeflader behandles, der i et snit gennem omdrejningsaksen består af sammensætninger af linjestykker og cirkelbuer. Et knæk på en sådan kurve, f.eks. hvor to linjestykker mødes, vil blive udgangspunkt for en del af et "overflødhedshorn".

Resultaterne illustreres med et eksempel:



Figur 14.2.7 Belastning af prisme gennem retvinklet, ligebeinet trekant. Bevægelsen skal være en rotation om kanten.  
a. set fra siden. b. set fra oven.

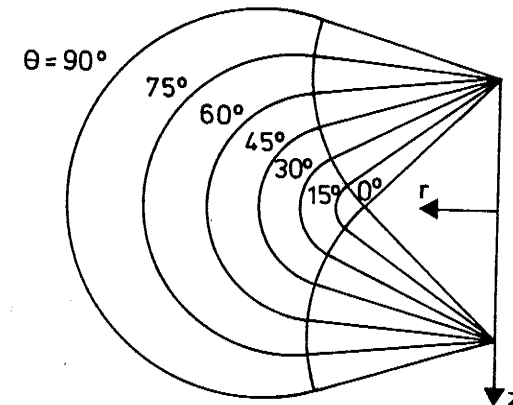
En betonblok, der enten er uarmeret eller armeret i oversiden, belastes på oversiden over et areal, der udgør en ligesidet, retvinklet trekant med grundlinjen langs blokkens kant, se figur 14.2.7. Blokkens side danner vinklen  $v$  med oversiden. Belastningen, hvis resultant står i trekantens topvinkel, påføres gennem en stiv påstøbt lastplade, der yderligere er fastholdt, så bevægelsen er tvunget til at være en rotation om trekantens grundlinje. Der søges en øvreværdiløsning for bæreevnen gennem en mekanisme med en rotation af et stift legeme.

Det stive legeme roterer om kanten af blokken. Trekantens katter frembringer hver sin side af flydefladen. Med centrum i hvert af grundlinjens endepunkter tænkes indlagt en kugle gennem trekantens toppunkt. På disse kugler skal "kuglespiralerne" nu findes. For den nederste af disse på figur 14.2.7 b gælder i oversiden  $\psi = -45^\circ$ . Der indføres et røz-cylinderkoordinatsystem med z-aksen i omdrejningsaksen og  $\theta = 0$  i betonklodsens overside. Med  $\tan \psi = 0,75$  fås af (14.2.12):  $\theta_0 = 67.33^\circ$ . Herefter kan  $\psi$  findes af (14.2.13), se tabel 14.2.1. Fladen består af alle de rette linjestykker fra kuglespiralen til kuglens centrum.

$\theta$	$\psi$	$\frac{r_c}{a}$	$\frac{a_c}{a}$	$\frac{S_\theta}{a^2}$	$\frac{P}{a^2 f_c}$
$0^\circ$	$-45^\circ$	1	0	0,333	0
$15^\circ$	$-36,5^\circ$	1,02	0,20	0,588	0,0850
$30^\circ$	$-26,95^\circ$	1,08	0,40	1,063	0,243
$45^\circ$	$-16,52^\circ$	1,18	0,62	1,941	0,539
$60^\circ$	$-5,49^\circ$	1,32	0,87	3,613	1,093
$75^\circ$	$5,74^\circ$	1,52	1,15	6,704	2,12
$90^\circ$	$16,76^\circ$	1,78	1,47	12,414	4,03

Tabel 14.2.1 Værdier hørende til figur 14.2.8.

Trekantens toppunkt vil frembringe en del af det tidligere fundne "overflødigshorn", som vil gå glat over i de to sideflader. Denne del af fladen vil således bestå af cirkler, hvis centrum,  $r = r_c$ , og radius  $a_c$  bestemmes af (14.2.5) og (14.2.6) med  $x_0$  lig med det på figur 14.2.7 viste mål a. For forskellige værdier af  $\theta$  kan flydefladens snit nu optegnes, se figur 14.2.8.

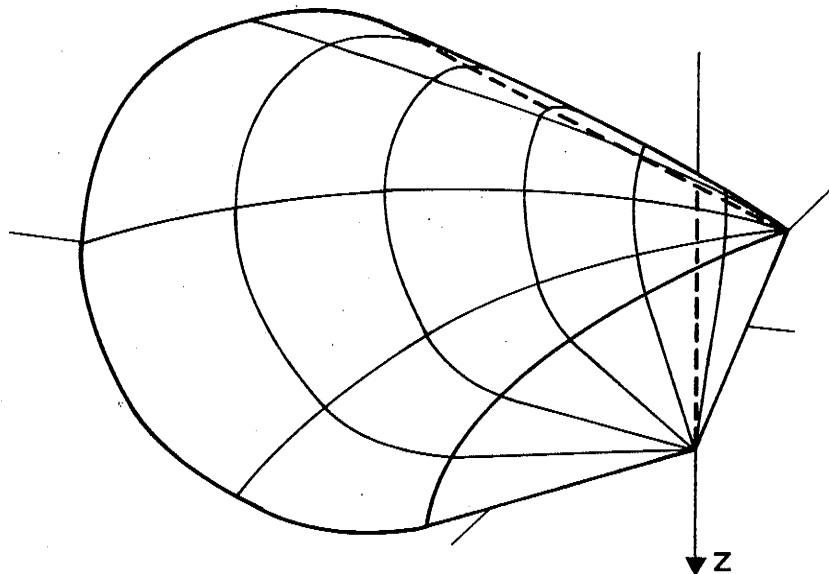


Figur 14.2.8 "Cylinderprojektion" af flydefladen fra figur 14.2.9.

Til bestemmelse af dissipationen skal anvendes (14.2.2). Kaldes det statiske moment af det af brudfladen i et snit gennem z-aksen afgrænsede område  $S_\theta$ , hvor  $\theta$  angiver, hvilket snit der er tale om, er  $\Delta V = \omega(S_\theta - S_0)$ . De statiske momenter af de nu kendte områder figur 14.2.8 kan bestemmes ved hjælp af formlen

$$S = \frac{1}{3} ar_c^2 + \frac{1}{3} aa_c (2a \cos \psi + \sqrt{2} r_c) + a_c^2 \left( \frac{\pi}{2} + \psi \right) \left( r_c + \frac{2}{3} a_c \frac{\cos \psi}{\frac{\pi}{2} + \psi} \right) \quad (14.2.14)$$

se tabel 14.2.1. Endelig beregnes bæreevnen ved benyttelse af (14.2.2),  $k = 4$ , samt  $D = A_y = Pa\omega$ , se sidste søjle i tabel 14.2.1. Er vinklen  $v$  en ret vinkel, er bæreevnen altså højst  $P = 4.03 a^2 f_c$ . For  $v = 45^\circ$  fås  $P = 0.539 a^2 f_c$ . Et rumligt billede af det "afdrejede" legeme ses på figur 14.2.9 til sammenligning med figur 14.2.1.



Figur 14.2.9 Afbrækket legeme ved det på figur 14.2.7 viste forsøg. Sammenlign med figur 14.2.1.

#### 14.3 Flydeflader i modificeret Coulomb-materiale.

I det foregående afsnit behandledes flydeflader, hvor vinklen  $\alpha$  mellem flydeflade og gensidig bevægelsesretning var lig med friktionsvinklen  $\varphi$ . Dette medførte, at hele flydefladen blev bestemt af en enkelt kurve. Det kunne eksempelvis være flydefladens skæringskurve med en plan gennem omdrejningsaksen.

For det modificerede Coulomb-materiale kan en flydeflade med  $\alpha > \varphi$  også blive aktuel, iden den kan give en mindre dissipation. Hermed forsvinder det geometriske bånd, som gjorde, at flydefladen kunne bestemmes ud fra en enkelt kurve i rummet. Alle flader er nu geometrisk mulige, når blot uligheden  $\alpha \geq \varphi$  er tilfredsstillet. Problemet at fastlægge den optimale flydeflade bliver hermed ændret til følgende tre dele: For en given bevægelse og givne randkurver af flydefladen skal den flade opsøges, som forbinder randkurverne og giver den mindste dissipation. For den givne bevægelse skal den randkurve findes, hvor der ved hjælp af den optimale flydeflade fås den mindste dissipation.

Endelig skal bevægelsen også være den, hvor forholdet mellem dissipationen og det ydre arbejde er mindst mulig. I dette afsnit vil den første af disse opgaver blive undersøgt nærmere.

Den totale dissipation  $D$  fås ved integration over flydefladen af dissipationen pr. arealenhed.

$$d_A = \frac{\delta f_c}{2} (\lambda - \mu \sin \alpha) \quad (14.1.1)$$

Her er  $\lambda$  og  $\mu$  to parametre, der beskriver friktionsvinklen og forholdet mellem træk- og trykstyrken. De er defineret i formel (3.10).

Af de to led i (14.1.1) behandles først det sidste, som ved integrationen giver

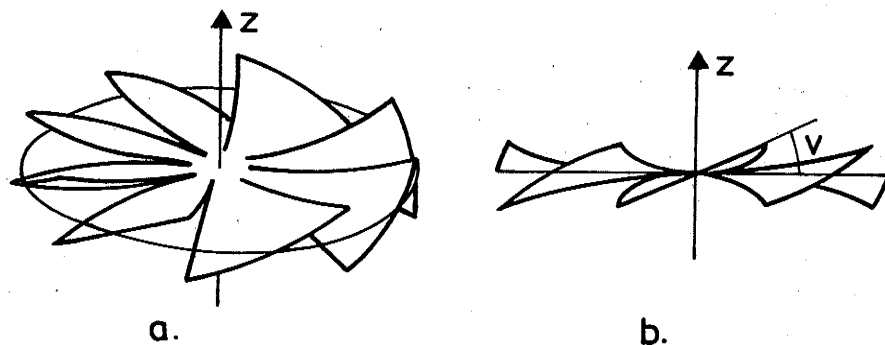
$$dD_2 = - \frac{f_c \mu}{2} \delta \sin \alpha dA \quad (14.3.1)$$

Da  $\alpha$  som nævnt er vinklen mellem bevægelsesretning og flydeflade, er  $\sin \alpha dA$  arealet af projektionen af arealelementet  $dA$  på en plan vinkelret på bevægelsesretningen. Ved integrationen adderes alle disse projicerede delarealer og bliver til arealet af den flade, der afgrænses ved at projicere randkurverne langs bevægelseskurverne til en flade, der overalt står vinkelret på bevægelseskurverne, hvis en sådan flade eksisterer. Dette forklares i tre eksempler, en ren translation, en ren rotation og en skruebevægelse.

Hvis bevægelsen er en ren translation, bliver bevægelseskurverne parallelle rette linjer, og randkurven projiceres blot på en plan vinkelret på disse.

Hvis bevægelsen er en rotation om en ret linje, akse, er bevægelseskurverne cirkler, hver beliggende i en plan vinkelret på akse og med centrum på denne. Et cylinderkoordinatsystem kan indlægges med  $z$ -aksen i omdrejningsaksen,  $r$ -aksen vinkelret derpå og vinklen  $\theta$  målt i en plan vinkelret på  $z$ -aksen. Randkurven, der kan beskrives ved en parameterfremstilling  $(r, \theta, z)$ , projiceres da i den kurve, der fås ved at erstatte  $\theta$  med en konstant værdi. Det projicerede areal kommer da til at ligge i en plan gennem  $z$ -aksen.

Den helt generelle bevægelse er en skruebevægelse, dvs. en rotation  $\omega$  om en akse kombineret med en translation  $t$  langs denne. Enhver bevægelse kan beskrives ved en sådan (øjeblikkelig) skruebevægelse. Hvis både  $\omega$  og  $t$  er forskellige fra nul, findes der ingen sammenhængende flade, der overalt står vinkelret på bevægelseskurverne. Projektionen kan dog forklares som en projektion på den på figur 14.3.1 viste "propel". Hver enkelt "vinge" er i afstanden  $r$  fra  $z$ -aksen drejet (vredet) en vinkel  $v = \omega r/t$ . Propellen har "uendelig mange" vinger. Selv om projektionen af randkurven ikke afgrænser et sammenhængende areal, bliver det alligevel et område med et areal, som kan findes.



Figur 14.3.1 Normal-"flade" til skruelinjer.  
a. set skråt ovenfra, b. set fra siden.

Integrationen af (14.3.1) kan nu foretages ved at erstatte  $\sin \alpha dA$  med det tilsvarende arealelement på den projicerede flydeflade. Dette multipliceres med  $\delta$  (som varierer over fladen, undtagen ved den rene translation) og  $\frac{1}{2} f_c \mu$ , og integreres.

Af det foregående fremgår, at integralet  $D_2$  af (14.3.1) kun afhænger af randkurven. Det er med andre ord uafhængigt af flydefladens forløb inden for denne.

Dette gælder til gengæld ikke for det første led i (14.1.1)

$$dD_1 = \frac{f_c \lambda}{2} \delta dA \quad (14.3.2)$$

Det ses, at leddet er proportionalt med det med  $\delta$  vægtede areal af flydefladen. Den optimale flydeflade er derfor den, der gør denne størrelse så lille som mulig.

Ved ren translation er  $\delta$  konstant. Den optimale flydeflade bliver derfor en flade, hvis areal er så lille som muligt, en såkaldt minimalflade. Blandt disse findes planen, der benyttes, når randkurverne ligger i en plan.

En anden løsning er den flade, der fås ved at rotere en cosh-kurve (en kædelinje) om  $x$ -aksen. (En sæbehinde, der udspændes mellem to cirkulære ringe beliggende i hver sin plan vinkelrette på centrernes forbindelseslinje, vil, hvis afstanden mellem cirklerne ikke er for stor, antage denne form.) Denne minimalflade er i [76.1] benyttet til at angive en øreværdiløsning på problemet gennemlokning af en plan plade (eller en kugleskal) ved belastning inden for et cirkulært område på den ene side af pladen (skallen).

Der kan nævnes endnu en simpel minimalflade, nemlig skruefladen. Til praktiske løsninger har det dog endnu ikke vist sig muligt at anvende den.

Også til løsninger med rene rotationer kan der angives nogle optimale flader. Planen kan også anvendes her, men nu kun når den indeholder omdrejningsaksen, og den må kun benyttes på den side af aksens, der svarer til adskillelse af de to legemer.

Der findes en bestemt løsning, som svarer til kravet, at flydefladen skal være uafhængig af koordinaten langs omdrejningsaksen. I dette tilfælde kan geometrien beskrives i en plan. Løsningen bliver den i afsnit 6.4.3 fundne retvinklede hyperbel. Fladen bliver en cylinderflade med frembringere langs  $z$ -aksen. I et snit vinkelret herpå ses en hyperbel, hvis asymptoter står vinkelret på hinanden og skærer hinanden i omdrejningsaksen. Der må naturligvis kun benyttes den del af fladen, der svarer til  $\alpha \geq \varphi$ .

Skruefladen kan også anvendes her. Rotationsaksen skal være sammenfaldende med skrueaksen. Denne flade og planen er de eneste af de hidtil nævnte flader, der kan bruges også ved skruebevægelser med både rotations- og translations-bidrag.

Da øvreverdimetoden i praksis ofte ikke vil føre til teoretisk eksakte resultater, vil det være rimeligt at have nogle simple tilnærmelsesmetoder til beregning af dissipationen i en flydeflade. Et princip herfor kan tage udgangspunkt i en konstatering, der blev gjort i afsnit 6.4.3 om den hyperbolske flydelinje. Det blev her konstateret, at dissipationen i en del AB af en hyperbelgren, se figur 6.4.3.4, kunne beregnes ved formelt at beregne dissipationen i midtpunktet M af AB og multiplicerede denne med længden af korden AB. Dette princip for beregning af dissipationen kan overføres til en rumlig flydeflade på følgende måde:

Den rumlige flydeflade tænkes fastlagt i rummet af et antal punkter. Disse punkter forbindes med så mange rette linjestykker, så der dannes en flade bestående af trekanter i forskellige planer. Dissipationsbidraget fra hver trekant beregnes nu som dissipationen i trekantens tyngdepunkt multipliceret med trekantens areal.

Da trekantopdelingen kan gøres på flere måder, giver princippet ikke en entydig bestemmelse af dissipationen, medmindre der stilles ekstra krav til opdelingen. Det kan f.eks. være, at der skal vælges den opdeling, der giver den mindste dissipation, eller (simplere) at der skal anvendes de mindst muligt outrerede trekanter, dvs. dem, hvor vinklerne i trekantene afviger mindst muligt fra  $60^\circ$ .

Den virkelige flydeflade vil formentlig ligge nærmere ved omdrejningsaksen end tyngdepunktet af trekanten. Flydefladens areal vil til gengæld være større end trekantens areal. Endelig vil dissipationen ikke være konstant over flydefladen. Det er disse ting, der, jævnfør princippet fra afsnit 6.4.3, antages at medføre en samlet fejl, der i praksis kan accepteres.

#### 14.4 Konklusion

For de rumlige flydeflader er der nu vist nogle teoretisk korrekte flydeflader, der dog stadig kan være vanskelige at anvende i en konkret opgave. Til praktiske beregninger er der derfor angivet et princip, hvorefter dissipationen i en flydeflade kan tilnærmes. Flydefladen fastlægges af et antal punkter. Et større eller mindre antal af disse punkter giver en mere eller mindre nøjagtig beskrivelse af fladen. Disse punkter og de parametre, der bestemmer bevægelsen, skal fastlægges, så evt. ydre geometriske betingelser bliver opfyldt, og så den beregnede værdi af bæreevnen bliver mindst mulig.

## 15. Effektivitet vurderet ud fra arbejdskurve

### 15.1 Indledning

Plasticitetsteorien bygger på et bestemt sæt af forudsætninger. Disse er nævnt i kapitel 2. Blandt disse findes den (vigtigste) forudsætning, at flydning, dvs. tøjningstilvækst uden ændring af spændingerne, skal kunne ske ubegrænset. I det enaksede tilfælde kan dette illustreres på en arbejdskurve, dvs. en kurve, der angiver spændingen  $\sigma$  som funktion af tøjningen  $\epsilon$ . Kravet om ubegrænset flydning betyder her, at denne kurve skal have et vandret stykke (evt. en asymptote) af ubegrænset længde; for vilkårligt store værdier af tøjningen skal spændingen være konstant. Denne konstante værdi er materialets flydespænding.

De fleste faste stoffer kan ikke modstå ubegrænsede deformationer uden at miste deres styrke. Dette ligger også netop i ordet flydning. Det associerer til en væske, som er et stof, der ikke "husker" sin oprindelige form, men kan deformeres vilkårligt og stadig være det samme stof.

Arbejdskurven for blødt stål har et vandret stykke af betydelig længde, 10 - 15 gange den mindste tøjning, hvor flydespændingen nås. Mens dette materiale derfor opfylder plasticitetsteoriens forudsætninger ret godt, er det samme ikke tilfældet for beton. Arbejdskurven for beton i enakset tryk er krum ved passagen af maksimalspændingen, trykstyrken.

Ved plasticitetsteoretiske bæreevneberegninger af betonkonstruktioner, hvor tøjningerne ikke er homogene, må derfor en af følgende to betingelser være opfyldt. Den ene betingelse er, at andre dele af konstruktionen sikrer flydeevnen. Dette er eksempelvis tilfældet for svagt armerede betonbjælker, hvor armeringen bestemmer både bæreevnen og flydekapaciteten. Den anden betingelse er, at der anvendes en lavere værdi af flydespændingen end den direkte målte maksimalspænding. Denne lavere værdi, som kaldes den effektive, plastiske styrke, er et udtryk for den spænding, der i middel kan opretholdes over et tøjningsinterval af en vis størrelse.

Med en lidt anderledes formulering er den plastiske betonstyrke den middelspænding, der i brudøjeblikket findes i den trykzone, der netop bestemmer bæreevnen. Forholdet mellem den effektive, plastiske styrke og betonens trykstyrke kaldes effektivitetsfaktoren og betegnes  $v$ .

Ofte bestemmes den effektive plastiske trykstyrke ved at sammenligne bæreevnen af hele konstruktionselementer, for eksempel bjælker eller plader, med den teoretiske bæreevne. Det vigtigste punkt, hvor betonen ikke opfylder plasticitetsteoriens forudsætninger, kan som nævnt ses direkte af arbejdskurven. Der er derfor også muligheder for at bestemme effektiviteten af betonen ud fra denne kurve. Et specielt, men meget almindeligt tilfælde, nemlig bøjning af rektangulære betonbjælker, er behandlet i [83.1]. En anden, mere generel metode til at angive en nedre grænse for effektiviteten udledes i det følgende. Den er ikke knyttet til noget bestemt konstruktionselement, men tager alene sit udgangspunkt i betonens arbejdskurve.

### 15.2 Plastiske, sikre arbejdskurver

Der er givet to konstruktioner  $K_V$  og  $K_M$  med identisk geometri. De to konstruktioner er udsat for den samme, proportionalt voksende belastning med lastparameteren  $P$ . Konstruktionerne er lavet af de to forskellige materialer  $V$  og  $M$  (virkelighed og model).

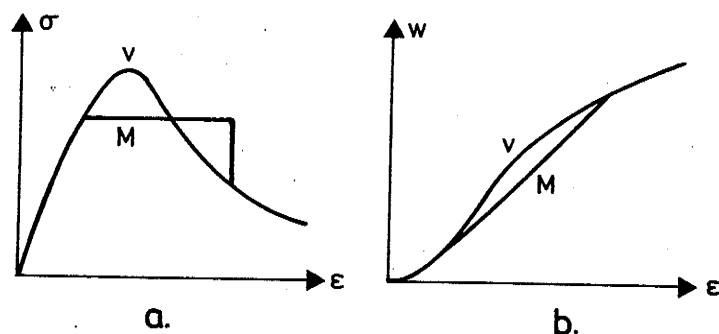
Det antages, at der i ethvert punkt i konstruktionerne, under hele belastningsforløbet indtil bæreevnen nås, sker tøjningstilvækster af samme fortegn, altså at tøjningerne overalt varierer monotont. Med denne forudsætning kan der til hvert af materialerne  $V$  og  $M$  knyttes en tøjningsenergifunktion,  $W_V$  og  $W_M$ , se figur 15.2.1. Tøjningsenergifunktionen, der er en funktion af tøjningerne, udtrykker sammenhængen mellem spændinger og tøjninger gennem ligningen

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}}$$

De omtalte størrelser er illustreret med kurver, hvor kun én spænding,  $\sigma$ , og én tøjning,  $\epsilon$ , beskriver materialet. Spændingen er her hældningskoefficienten på kurven over tøjningsenergifunktionen. Om materialerne  $V$  og  $M$  gælder  $W_V \geq W_M$ , så længe tøjningerne ligger inden

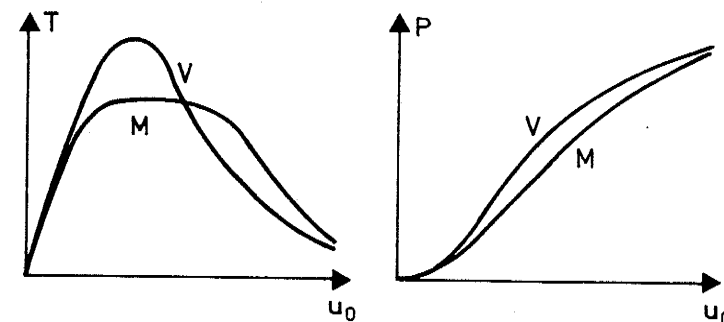
for visse grænser  $f(\bar{\epsilon}) \leq f_g$ , eller i den endimensionale model:  $\epsilon \leq \epsilon_g$ . (For større tøjninger kan det antages, at de to tøjningsenergifunktioner er identiske. Hermed forsvinder begrænsningen, idet  $\epsilon_g$  bliver uendelig). Med disse forudsætninger kan det vises, at bæreevnen  $P_V$  af  $K_V$  er større end en værdi, der kan bestemmes ved analyse af  $K_M$ . Denne værdi  $P_N$  vil ofte ligge tæt ved bæreevnen  $P_M$  af  $K_M$ . Beviset forløber således:

Der indføres flytningen af den ydre belastnings angrebspunkt  $u_0$ . Hvis belastningen angriber mere end ét sted, indføres  $u_0$  gennem ligningen  $dA_y = P du_0$ , hvor  $A_y$  er de ydre kræfters arbejde.



Figur 15.2.1 Endimensionale illustrationer af  
a. arbejdskurver og b. tøjnings-  
energifunktioner for materialerne V og M.

For enhver værdi af flytningerne  $u$  kan den samlede tøjningsenergi i hver af konstruktionerne bestemmes. Hvis denne minimeres med hensyn til  $u$  under overholdelse af værdien  $u_0$ , fås de to samlede tøjningsenergifunktioner  $T_V(u_0)$  og  $T_M(u_0)$ , se figur 15.2.2a. Forudsætningen at  $W_V \geq W_M$ , medfører, at  $T_V \geq T_M$ . Ved at differentiere  $T_V$  og  $T_M$  med hensyn til  $u_0$  fås konstruktionernes belastningsarbejdskurver, se figur 15.2.2b. De højeste punkter på disse kurver er konstruktionernes bæreevner  $P_V$  og  $P_M$ . Disse svarer til de største tangenthældninger på tøjningsenergifunktionernes grafer.



Figur 15.2.2 a. samlede tøjningsenergifunktioner og  
b. belastningsarbejdskurver for de to  
konstruktioner.

Hvis kurven for  $T_V$  er vanskelig at beregne, mens kurven for  $T_M$  kan findes, kan man alligevel angive en nedre grænse for  $P_V$ . Den største hældning på kurven for  $T_V$  kan nemlig ikke blive mindre end hældningen af den rette linje OA gennem origo på figur 15.2.2a, som tangerer kurven for  $T_M$ . Den således fundne nedre grænse  $P_{N1}$  for  $P_V$  svarer til højden af det rektangel på figur 15.2.2b, som har øverste højre hjørne på kurven for  $P_M$ , og hvis areal er lig med arealet under den tilsvarende del af kurven for  $P_M$ .

Jo mere viden man har om kurven for  $T_V$  eller  $P_V$ , jo højere kan den nedre grænse for  $P_V$  gøres. Hvis man ved, at stivheden af  $K_V$  aldrig er større end f.eks. 1,1 gange begyndelsesstivheden af  $K_M$ , kan rektanglet erstattes med et trapez, hvis venstre sidelinje har denne hældning. Øverste højre hjørne skal stadig ligge på kurven for  $P_M$ , og trapezets areal skal være lig med det af kurven afgrænsede areal. Den således havede nedre grænse  $P_{N2}$  ses også på figur 15.2.2b.

Hvis den oprindelige arbejdskurve  $\sigma_M$  indeholdt et "godt langt" vandret stykke, dvs. hvis M er et plastisk materiale med en "god flydeevne", vil kurven for  $T_M$  indeholde et langt stykke med en ringe krumning. Forskellen mellem hældningen midt på dette stykke og hældningen af tangenten gennem origo bliver hermed mindre.

Det er meningen, at modellen gennem kurven  $\sigma_M$  på figur 15.2.1a skal repræsentere et plastisk materiale, dvs. et med en mindre variation i spændingerne end det virkelige materiale  $\sigma_V$ . Denne mindre variation må nødvendigvis medføre, at hældningen af kurven  $T_M$  varierer mindre end hældningen af kurven  $T_V$ . Dette vil give en forøgelse af den maksimale hældning af  $T_V$  udover den nedre grænse, der kan bevises at eksistere,  $P_{N1}$  eller  $P_{N2}$ . Alt i alt kan man altså, selv om det ikke er helt matematisk korrekt, slutte, at  $P_V \geq P_M$ , dvs. at modellens bæreevne er mindre end virkelighedens; den giver altså en værdi på den sikre side.

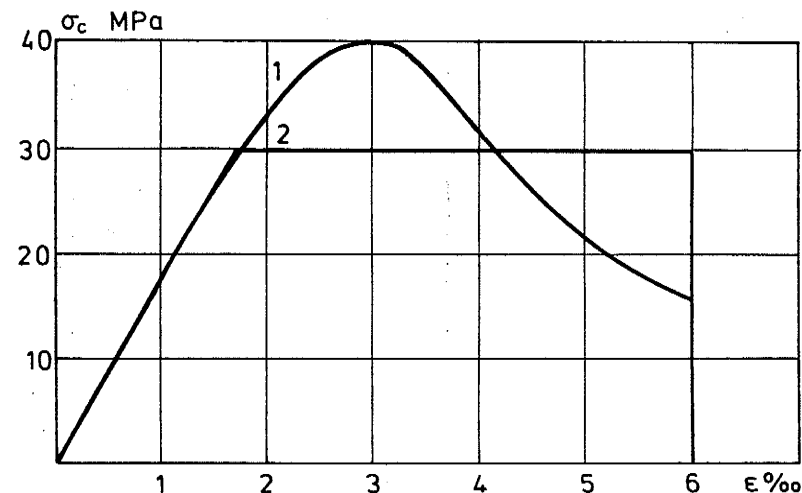
Grænsetøjningen for det plastiske stykke på arbejdskurven skal vælges så stor, så den normalt ikke overskrides. Der bør også tages hensyn til, at det vandrette stykke på den plastiske kurve får en rimelig længde i forhold til kurvens elastiske del, så modellen har en vis flydekapacitet. Hermed er nemlig opnået en model, hvor bæreevnen i praksis kan bestemmes ved hjælp af plasticitetsteorien. Det er med andre ord muligt at beregne effektivitetskoefficienten,  $v$ , som forholdet mellem maksimalspændingerne på kurverne for  $\sigma_M$  og  $\sigma_V$ .

### 15.3 Effektivitetsfaktoren for beton

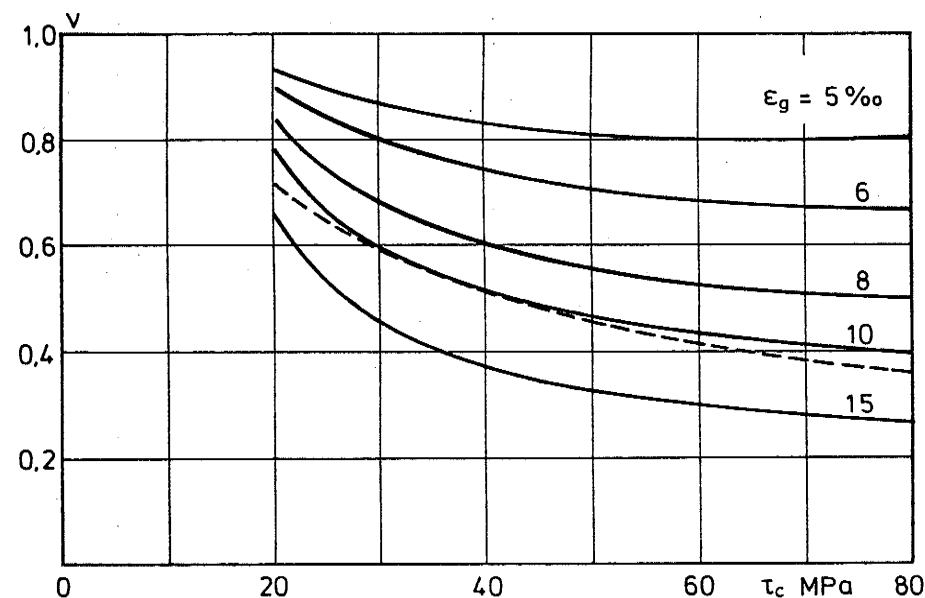
Sætningen fra det forrige afsnit skal nu anvendes på beton. Som den virkelige arbejdskurve benyttes en kurve, som er fundet af Wang, Shah og Naaman på grundlag af trykforsøg på små cylindre op til 6‰ tøjning. Forsøgene er refereret i [78.1]. Ved regression er fundet en kurve for hver værdi af betontrykstyrken. De er også behandlet i [83.1], hvor der er indført en lille ændring af de statistisk fastlagte arbejdskurver.

På figur 15.3.1 er vist en arbejdskurve for normalvægtbeton med cylindertrykstyrken  $f_c = 40$  MPa, kurve 1. Der er også vist den "trapez-formede" arbejdskurve, kurve 2, som op til en tøjning på  $\epsilon_g = 6‰$  afgrænser det samme areal under kurven som kurve 1. Den tilhørende  $v$ -værdi er  $30 \text{ MPa} / 40 \text{ MPa} = 0.75$ . Beregnes  $v$  på denne måde for forskellige værdier af  $f_c$  og  $\epsilon_g$ , fås de kurver, der er vist på figur 15.3.2.

Kurverne falder med stigende betontrykstyrke, da arbejdskurverne for de stærke betoner falder relativt hurtigere efter passagen af toppunktet end arbejdskurverne for de svagere betoner.



Figur 15.3.1 Analytisk betonarbejdskurve, kurve 1, og tilsvarende lineær elastisk, perfekt plastisk arbejdskurve, kurve 2.



Figur 15.3.2 Effektivitetsfaktoren  $v$  som en funktion af  $f_c$  og  $\epsilon_g$ . Den punkterede kurve er fra [79.2].



Hvilken grænsetøjning er nu den rigtige? Dette er ikke let at svare på, men i nogle forsøg, som er refereret i [67.1], blev der målt tryktøjninger i beton på op til 8 ‰ i kroppen på nogle betonbjælker, som blev belastet til forskydningsbrud. Målingerne blev afbrudt inden bruddet.

Resultaterne kan også sammenlignes med en empirisk bestemt  $v$ -funktion. I [79.2] blev  $v$  bestemt for forskydningsstyrken af betonbjælker uden forskydningsarmering. I en af forsøgsserierne [62.1] var betontrykstyrken den eneste parameter, der blev varieret. I [79.2] gav dette  $v$ -funktionen  $v = 3.2/\sqrt{f_c}$ , hvor  $f_c$  skal indsættes i enheden MPa. Betonstyrken lå mellem 13 og 43 MPa. Denne funktion er indtegnet punkteret på figur 15.3.2. Det ses, at den giver nogenlunde den samme variation af  $v$  med  $f_c$ , og at den svarer til en grænsetøjning på ca. 10 ‰.

Som det fremgår af bl.a. [78.1], [79.2] og [83.1], afhænger effektivitetsfaktoren også af andet end betonstyrken, bl.a. af armeringsmængden. Den kan derfor ikke forventes, at der alene ud fra betonstyrken kan findes andet end nogle kvalitative sammenhænge og relative overensstemmelser med andre  $v$ -bestemmelser. Det er imidlertid vist helt tydeligt, at betonens arbejdskurves form er en væsentlig grund til, at der må anvendes en reduktionsfaktor på betonens cylinderstyrke.

Effektivitetsfaktorens afhængighed af betontrykstyrken er også tydeligt forklaret gennem ændringen af arbejdskurvens form. I praksis kan effektivitetsfaktoren dog næppe bestemmes uden et nærmere kendskab til den aktuelle konstruktion.

## 16. Normalitetsbetingelsen

### 16.1 Indledning

Opfyldelsen af normalitetsbetingelsen er formentlig af mindre vigtighed end flydekapaciteten, dvs. eksistensen af det i kapitel 15 behandlede vandrette flydeniveau på materialernes arbejdskurve. Her skal dog alligevel knyttes nogle bemærkninger til problemet.

Flydeloven for et plastisk materiale er den betingelse, der fastlægger de mulige plastiske deformationer ved flydning. Normalitetsbetingelsen, eller den associerede flydelov, som den også kaldes, er ét eksempel på en flydelov. Den siger i den generelle plasticitetsteori, at den plastiske tøjningstilvækstvektor skal stå vinkelret på flydefladen og være rettet ud af denne, jvf. kapitel 2. Normalitetsbetingelsen er en vigtig flydelov, fordi den muliggør bevis af øvre- og nedreværdi- og entydighedssætningerne. Hvorvidt et givet materiale i virkeligheden tilfredsstiller normalitetsbetingelsen er dog en anden sag.

For et isotropt Coulomb-materiale betyder normalitetsbetingelsen, at hovedretningerne for spændingerne og tøjningerne (egentlig de plastiske tøjningstilvækster) skal være sammenfaldende, samt at der ved flydning bliver en vis dilatation (volumenforøgelse), se f.eks. formel (3.13).

Det er meget vanskeligt at måle tøjninger i beton ved brud. Tøjningerne kan være meget ujævnt fordelt, og det kan være umuligt at vide på forhånd, hvor "brudzonen" i en given prøve opstår. Endvidere er flydeevnen meget lille, hvad der gør prøven ustabil ved brud. Det er derfor vanskeligt at eftervise, at normalitetsbetingelsen gælder, f.eks. for tøjningstilvæksterne, når den maksimale spænding nås.

Man har foretaget målinger af sammenhørende længde- og tværdeformationer for betoncylindre udsat for trykbelastning på endefladerne. Heraf har man set, at tværdeformationerne vokser kraftigt, når belastningen nærmer sig brudlasten. Der sker hermed en vis volumenudvidelse i betonen, når spændingen nærmer sig trykbrud. Dette tyder på, at normalitetsbetingelsen kan være opfyldt. Der findes dog næppe noget egentligt forsøgsmæssigt bevis herfor.

I de geotekniske materialer, sand og ler, og de pulvermaterialer, der opbevares i siloer, er det lettere at måle de plastiske tøjninger, da disse materialer har en langt større flydeevne. Det viser sig her, at der i nogle tilfælde opnås en begrænset dilatation (i andre endda en volumenformindskelse), og derefter foregår flydningen med stort set konstant volumen. Disse materialer er altså måske nok plastiske materialer, men de af dem, der har en friktionsvinkel større end nul, har en anden flydelov end normalitetsbetingelsen.

Spørgsmålet er nu, hvordan flydeloven påvirker bæreevnen. Af den generelle plasticitetsteori følger, at bæreevnen ikke kan være større, end den ville være med normalitetsbetingelsen. Et ideelt plastisk materiale med normalitetsbetingelsen som flydelov har nemlig den største bæreevne, man kan tænke sig med en given brudflade for materialet.

Ud fra geometrien og de plastiske egenskaber alene kan der muligvis angives flere forskellige spændingstilstande med tilhørende plastiske tøjninger, som giver forskellige værdier af belastningen. Den af disse, der angiver bæreevnen, kan ikke vælges uden kendskab til belastningsforløbet. For at bestemme bæreevnen kan det derfor være nødvendigt at kende de elastiske egenskaber og følge hele belastningsforløbet beregningsmæssigt gennem elastiske og elastisk-plastiske tilstande, til der nås en mekanisme. Hermed er så store dele af konstruktionen blevet plastiske, at ubegrænset deformation kan ske uden ændring af spændingerne. Da belastningen heller ikke ændres, er bæreevnen nået.

Der kan angives en sætning, som giver mulighed for bestemmelse af sikre værdier af bæreevnen afhængigt af flydeloven. Disse nedreværdier vil i visse tilfælde være meget på den sikre side.

I hvert punkt på flydefladen indlægges normal-(hyper-)planer til alle de mulige tøjningsvektorer. Disse planer afgrænser måske en ny flade, som er indeholdt i den oprindelige flydeflade. Med denne nye flade som flydeflade og normalitetsbetingelsen gældende kan der beregnes nedreværdier for bæreevnen. Enhver af disse nedreværdier er også nedreværdi for den virkelige konstruktion med sin flydebetingelse og flydelov. Der er altså konstrueret en sikker flydeflade, som kan anvendes sammen med normalitetsbetingelsen.

Beviset for sætningen bygger på, at det indre arbejde ved en plastisk deformation i det virkelige materiale aldrig kan blive mindre end det, der beregnes med den reducerede flydeflade og normalitetsbetingelsen.

I [77.1] er i afsnittet "Bemærkninger om friktionsproblemer" angivet nogle sætninger til vurdering af bæreevnen af konstruktioner, hvor normalitetsbetingelsen ikke gælder. Disse kan alle indeholdes i dels den netop beskrevne generelle nedreværdisætning, dels den tidligere nævnte konstatering, at bæreevnen aldrig kan blive større, end den ville være, hvis normalitetsbetingelsen gjaldt.

## 16.2 Eksempler

Hvornår har flydeloven indflydelse på bæreevnen?

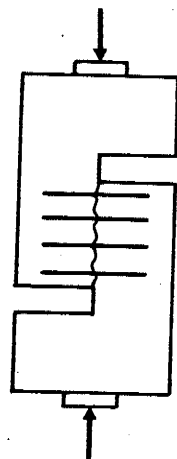
Behandlingen indledes med et eksempel, nemlig forskydningsstyrken af armeret beton. På figur 16.2.1 er vist et betonprøvelegeme udformet således, at bruddet ved den viste belastning forløber langs den forskydningspåvirkede lodrette linje midt i prøvelegemet. Denne linje kan før prøvningen ligge i intakt beton, i et støbeskel, eller betonen kan her være spaltet ved et koncentreret tryk langs linjen vinkelret på den viste plan. Brudsnittet skæres af en armering, der her kun antages at kunne overføre aksiale kræfter. Der ses altså bort fra dornvirkningen. Armeringen er forankret godt på begge sider af brudsnittet.

Ved bruddet vil betonen overføre en forskydningsspænding, som er givet af Coulombs flydebetingelse

$$\tau = c - \sigma \tan \varphi \quad (16.2.1)$$

Her er  $c$  og  $\varphi$  de styrkeparametre, der gælder for netop denne flade afhængigt af dens forbehandling. Modholdsspændingen  $\sigma$  kommer fra armeringen.

Hvis dilatationsvinklen (den vinkel med brudfladen, hvorunder de to dele fjerner sig fra hinanden) er nul, sker der teoretisk ingen forlængelse af armeringen. Den vil da ikke flyde, og  $\sigma$  vil være ubestemt. Ifølge den ideelle plasticitetsteori er dilatationsvinklen lig med friktionsvinklen. Armeringens forlængelse er da  $\tan \varphi$  gange forskydningen. Da armeringen nu flyder, kan modholdet bestemmes.



Figur 16.2.1 Prøvelegeme til bestemmelse af forskydningsstyrken af armeret beton.

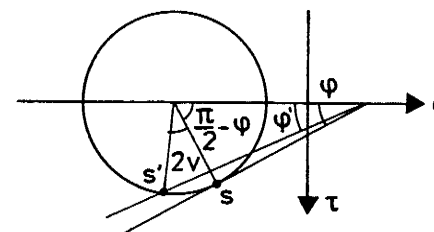
Kaldes den geometriske armeringsgrad af brudsnittet  $\varphi_a$  og armeringens flydespænding  $f_y$ , fås

$$\tau = c + \varphi_a f_y \tan \varphi \quad (16.2.2)$$

Hvis dilatationsvinklen er mindre end  $\varphi$ , men stadig positiv, flyder armeringen stadig, omend forlængelsen er mindre end før. Der skal derfor indsættes den samme værdi af  $\sigma$  i (16.2.1), og bæreevnen bliver stadig bestemt af (16.2.2).

Hvis brudsnittet forud for bruddet er svagere end den omkringliggende beton, vil bruddet ske med flydning kun i brudsnittet og ikke i den omkringliggende beton. Løsningen vil da være (16.2.2). Hvis bruddet sker i homogen beton, er der imidlertid den mulighed, at brudsnittet er drejet en vinkel  $v$  med sliplinjerne. Denne vinkel omtales nærmere senere i dette afsnit. Den ligger mellem nul og friktionsvinklen. Betragtes spændingerne i Mohr's plan, se figur 16.2.2, sker der den ændring, at spændingspunktet  $S$  flyttes til  $S'$ . Bæreevnen ifølge formel (16.2.1) eller (16.2.2) bliver da reduceret ved multiplikation med forholdet mellem tangens til de viste vinkler  $\varphi'$  og  $\varphi$ . (16.2.2) ændres hermed til

$$\tau = (c \cot \varphi + \varphi_a f_y) \frac{\sin \varphi \cos(\varphi - 2v)}{1 - \sin \varphi \sin(\varphi - 2v)} \quad (16.2.3)$$



Figur 16.2.2 Flytning af spændingspunkt ved drejning af sliplinjeretningen i forhold til brudretningen.

Konklusionen er altså, at når blot der sker en vis dilatation, fås den fulde virkning af armeringen. Hvis brudsnittet er et svagt snit i betonen, er bæreevnen den samme, som den ville være, hvis normalitetsbetingelsen gjaldt. Her skal dilatationen altså kun fastlægge det kvalitative i bruddet, hvorefter det er "statisk bestemt". Hvis bruddet sker i homogent materiale, kan der dog ske en reduktion af bæreevnen på grund af, at de snit, hvor spændingerne opfylder flydebetingelsen, er drejet i forhold til brudsnittet.

Deformationerne ved bruddet afhænger naturligvis af dilatationsvinklen. Tværudvidelsen bliver forskydningen på langs multipliceret med tangens til denne vinkel.

I det følgende skal det nævnes, i hvilke tilfælde flydeloven kan have indflydelse på de i denne rapport behandlede problemer.

Ved udledningen af sliplinjefelterne i kapitel 4 og 5 er kun benyttet betingelser til spændingerne, nemlig ligevægtsligningerne og flydebetingelsen. Disse felter er derfor uafhængige af flydeloven.

Ved bestemmelse af tøjninger og flytninger må man kende dilatationsvinklen. Denne kan defineres ved plan deformationstilstand analogt med friktionsvinklen som den vinkel, hvormed vinklen mellem tøjningskarakteristikkerne afviger fra en ret vinkel, positiv, når der ved flydning sker en volumenforøgelse og negativ ved en volumenformindskelse. Tøjningskarakteristikkerne er de linjer, hvis

længdetøjning overalt er nul. Dilatationsvinklen ligger mellem friktionsvinklen og nul.

Man må imidlertid også vide, hvad der sker med kravet om sammenfald af hovedretninger for tøjninger og spændinger. Hvis dette krav opretholdes, vil karakteristikkene for spændinger og tøjninger aldrig falde sammen. (Spændingskarakteristikkerne i en flydezone kaldes sliplinjer, jvf. kapitel 4).

Tøjningsgrænselinjer, dvs. linjer der afgrænser områder med plastiske tøjninger fra områder uden, må nødvendigvis være tøjningskarakteristikker. En flytningsdiskontinuitetslinje indføres sædvanligvis som en meget smal zone med stor deformation. Denne zones begrænsningslinjer er også tøjningsgrænselinjer. Når zonens bredde bliver forsvindende lille, bliver flytningsdiskontinuitetslinjen derfor også en tøjningskarakteristik.

Hvis hovedretningerne for spændinger og tøjninger er sammenfaldende, vil spændings- og tøjningskarakteristikkerne som nævnt aldrig falde sammen. Det betyder, at hverken tøjningsgrænselinjer eller flytningsdiskontinuitetslinjer er sliplinjer. Dette har bl.a. det paradoksale resultat, at en flytningsdiskontinuitetslinje bliver "et flydesnit uden flydespændinger". Da linjen ikke er en sliplinje, er det endvidere ikke længere muligt på entydig måde at bestemme spændingerne langs linjen, dvs. Kötter's ligninger gælder ikke længere, jvf. kapitel 4.

Hvis der tillades en vinkel mellem de to sæt hovedretninger på halvdelen af differensen mellem friktionsvinklen og dilatationsvinklen, bliver der mulighed for sammenfald mellem sliplinjer og tøjningskarakteristikker, dog højst i den ene retning (a- eller b-linjen, se kapitel 4) ad gangen. Det er nu muligt, at en flytningsdiskontinuitetslinje også bliver en sliplinje, men det tidligere omtalte paradoks er stadig ikke udelukket. Tværtimod er den mulige vinkel mellem flytningsdiskontinuitetslinjen og sliplinjen fordoblet.

I visse tilfælde udgør en flytningsgrænselinje grænsen imod et andet stærkere materiale. Når flytningsgrænselinjen ikke er en sliplinje, opfylder spændingerne langs denne ikke flydebetingelsen, men en anden svagere betingelse. Situationen bliver da den samme, som hvis der i overgangen mellem de to materialer kun kunne over-

føres spændinger, som opfyldte den svagere betingelse. Overgangen kan altså komme til at virke, som om den var "delvis ru", også selv om den muligvis kan overføre spændinger, der svarer til en fuldstændig forbindelse mellem de to materialer.

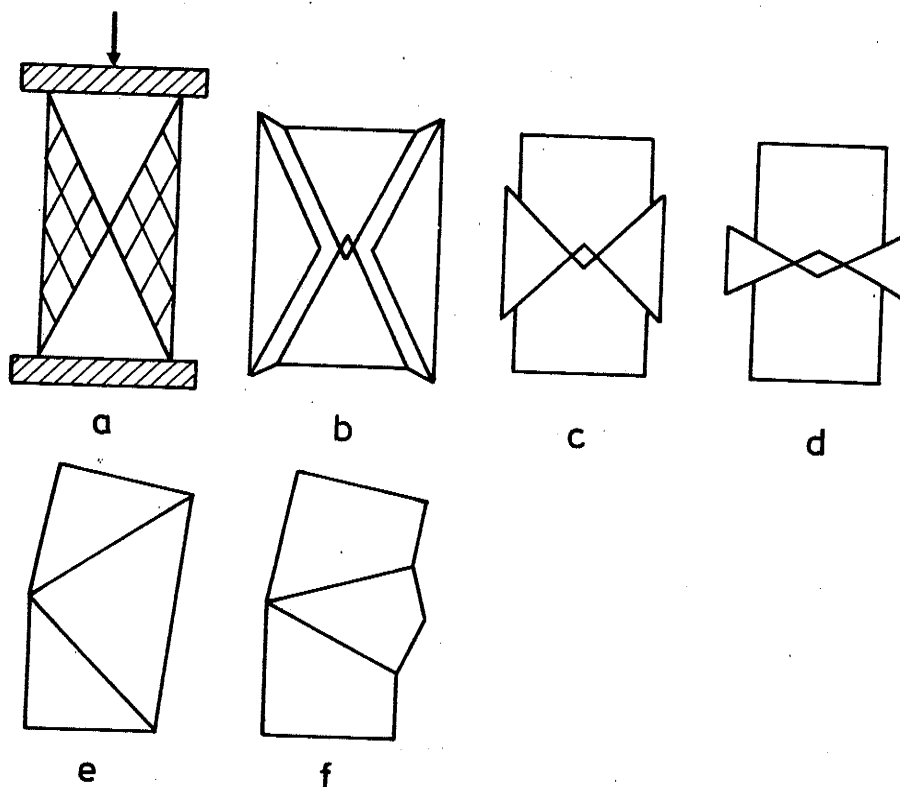
Disse "svagere snit", som kan opstå på grund af de forøgede deformationsmuligheder, behøver ikke at ligge ved grænsen mellem forskellige materialer. De kan ligge inde i en flydezone i et homogent materiale. Materialet kan således tilsyneladende langs sine flydesnit få en svagere flydebetingelse end sin egentlige flydebetingelse.

I kapitel 7 behandles trykstyrken af lave trykprøvelegemer. Ved behandlingen benyttes, at der skal være flydning helt ind til midten af prøven, og at der skal være en grænsesliplinje herfra og ud til den frie overflade.

Hvis grænselinjen for områder med tøjninger ikke længere behøver at være en sliplinje, behøver områderne med tøjninger ikke længere være så udbredte, og der bliver muligheder for deformation, hvor en mindre del af prøven deformeres. På figur 16.2.3 er vist nogle eksempler herpå, hvor dilatationen (ret drastisk) er sat til nul. Den mindste nødvendige højde af prøven ses på figur 16.2.3.d. Den er  $\frac{1}{2} b$ . Det er altså muligt, at bæreevnen ved  $h/b = \frac{1}{2}$  kun er trykstyrken gange arealet. Ligesom løsningen med normalitetsbetingelsen giver en øvre grænse for bæreevnen, er dette også kun en nedre grænse for den. Hvad bæreevnen faktisk er, kan som tidligere nævnt ikke afgøres alene ud fra de plastiske egenskaber.

I kapitel 8 og 9 behandles spaltning og hjørneafbrækning. Løsningen ses på figur 8.3.1. Der synes ikke at være muligheder for at indskrænke områderne med deformationer, hvorfor bæreevnen er uafhængig af flydeloven.

Kapitel 10 handler om forankring. En af de principielle løsninger ses på figur 10.2.2. Hældningen af den midterste grænsesliplinje er bestemt af, at de to dele skal kunne translateres uden en samtidig fjernelse fra hinanden. Med en dilatationsvinkel, som er mindre end friktionsvinklen, bliver dette muligt for en fladere grænsesliplinje. Sliplinjefelterne ved fugens ender bliver herved mindre, og bæreevnen formindskes.



Figur 16.2.3 a. Trykprøvelegeme,  $h/b = 2$ ,  $\varphi = 37^\circ$  med løsningen indtegnet (sliplinjefelt). b. Deformation med normalitetsbetingelsen. c. - f. Deformationer uden dilatation. c. og d. Flytningsdiskontinuitetslinje. e. og f. Zonebrud. c. og e. Sammenfaldende hovedspændings- og -tøjningsretninger. d. og f. Drejede hovedtøjningsretninger.

Hvis grænsefladen mellem de to stive legemer stadig er en sliplinje, svarer bæreevnen til bæreevnen af den på figur 10.2.3. viste konstruktion med en positiv vinkel  $v$ . Hermed fås en sammenhæng mellem de på samme figur viste kræfter  $P_1$  og  $P_2$ , som er den samme, som hvis normalitetsbetingelsen gjaldt. De på figur 10.2.5 viste flydeflader gælder altså stadig, men de tilhørende tøjninger er anderledes.

I kapitel 11 om murværk bygger løsningen i enderne af fugen på løsningerne fra kapitel 7. En svækkelse her kan betyde en større udstrækning af forankringszonen og dermed en lidt mindre bæreevne. Formindskelsen er dog ret ringe, medmindre forankringszonerne er meget store.

I kapitel 12 og 13 om propudpresning og silotryk presses et medium ud mellem nogle stillestående vægge. Ifølge normalitetsbetingelsen fås en dilatation, som nødvendiggør, at hele mediet er i flydning. Hvis imidlertid dilatationen langs væggen er nul, er det muligt, at udpresningen sker uden deformation af store dele af mediet. I et sådant tilfælde kan friktionsbidraget til bæreevnen ikke beregnes ved hjælp af plasticitetsteorien, da trykket på væggen ikke kendes. Der kan kun angives nogle grænser for trykket, aktivt og passivt tryk, se afsnit 13.2.

### 16.3 Konklusion

Hvis flydeloven for et plastisk materiale ikke er normalitetsbetingelsen, kan bæreevnen være formindsket. Den kan i visse tilfælde ikke længere findes ved blot at betragte materialernes plastiske egenskaber.

Om de konkrete bæreevneproblemer kan man sige, at nogle afhænger af flydeloven, mens andre ikke gør det. Som et princip for, hvornår flydeloven har indflydelse på bæreevnen, kan man sige, at jo mere en opgave er statisk bestemt, jo mere er bæreevnen uafhængig af flydeloven. Dette gælder også, hvis de "kritiske" snit er få og lette at udpege, jævnfør eksemplet med forskydningsstyrken af armeret beton i afsnit 16.2. Omvendt gælder det, at jo mere en opgave er styret af f.eks. faste understøtninger, dvs. jo mere den er geometrisk bestemt, jo større indflydelse har flydeloven på bæreevnen.

Princippet begrundes således: I den geometrisk bestemte opgave er der behov for en nøje analyse af bevægelserne ved flydning, så her betyder de evt. forøgede tøjningsmuligheder meget. I den statisk bestemte opgave er det tilstrækkeligt at kende de kvalitative træk i flydemekanismen for at bestemme bæreevnen.

### 17. Konklusion

I afhandlingen er angivet nogle plasticitetsteoretiske løsninger på især todimensionale bæreevneproblemer i beton. Løsningerne kan anvendes direkte i de aktuelle situationer. De tjener også til fremtidig inspiration for andre, som vil undersøge lignende problemer.

Løsningerne medvirker derudover til afklaring af, hvor langt man med rimelighed kan anvende plasticitetsteorien. Det er her vist, at nogle situationer, som ellers kun havde empiriske løsninger eller skulle løses med stort EDB-udstyr og ikke lineære materialegenskaber, kan løses med plasticitetsteorien og nogle fornuftigt valgte styrkeparametre.

Når man anvender en teori, hvis forudsætninger ikke alle er opfyldt, kan teorien naturligvis ikke beskrive den fulde sandhed om det behandlede problem. Dette betyder dog ikke, at teorien nødvendigvis skal forkastes som ubrugelig. Hvis nemlig dens resultater stemmer rimeligt godt med forsøg, som er relevante for dens anvendelse, kan den være en udmærket teknisk teori, og man kan have tillid til dens forudsigelser. Dette er situationen for behandlingen af beton som et plastisk materiale.

I kapitel 15 og 16 er netop det problem behandlet, at betonen ikke er et ideelt plastisk materiale. Dette medfører, at betonkonstruktioner ikke helt opnår den bæreevne, teorien forudsiger. Det er imidlertid vist i disse kapitler, at det kun er nødvendigt at foretage en begrænset reduktion af styrkeparametrene, for at man kan stole på løsningerne. Man kan have en positiv eller en negativ holdning til dette problem.

Den positive holdning er den, at det blot skyldes, at betonens plastiske styrke på grund af den begrænsede flydeevne er mindre end toppunktet på arbejdskurven. Da man ikke kan måle den plastiske styrke direkte på noget standardiseret prøvelegeme, fastsættes den som en vis brøkdel af den styrke, arbejdskurvens toppunkt angiver.

Den negative holdning er, at plasticitetsteorien med de tilhørende forsøgsbestemte effektivitetsfaktorer er en god måde at lave empiri på. Man får nemlig nogle kvalitativt rigtige sammenhænge mellem de indgående parametre, omend andre parametre kan mangle i behandlingen.

Da man, før man udfører forsøg, ud fra sin teoretiske viden vil have en god formodning om resultatet, vil metoden være forsøgsbesparende. Hvis resultaterne ekstrapoleres ud over det interval, som er dækket af forsøg, er plasticitetsteorien i hvert fald langt bedre end den rene "curve-fitting". Plasticitetsteorien vil bl.a. kunne advare om opståelsen af andre brudtyper end dem, der var aktuelle ved forsøgene.

Hvadenten man forholder sig positivt eller negativt i dette spørgsmål, er det forlængst vist, at plasticitetsteorien kan bruges til bæreevnebestemmelse for betonkonstruktioner.

# 18. Symbolliste

Kun almene symboler og symboler, der anvendes i flere kapitler, er medtaget i denne liste.

Symbol	Betydning	Henvisning
$A_y$	ydre arbejde ved øvreværdiberegning	8.2
$c$	cohæsion	(3.1)
$d$	specifik dissipation	(3.9)
$D$	total dissipation	(3.14)
$f_c$	enakset trykstyrke ( $\geq 0$ )	(3.2)
$f_t$	enakset trækstyrke ( $\geq 0$ )	(3.5)
$f_y$	flydespænding	6.3
$k$	$k = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$	(3.3)
$l_1$	længde målt langs a-linje	(4.8)
$l_2$	længde målt langs b-linje	(4.8)
$r$	radius i største mulige Mohr'ske cirkel	(4.1)
$r$	afstand	9.2
$r_h$	hydraulisk radius	12.2
$r, \theta, z$	cylindriske koordinater	
$s$	abscisse til centrum for største mulige Mohr'ske cirkel, positiv som tryk, $s = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$	(4.1)
$u$	flytning	5.9
$v$	topvinkel i flydezone	6.4.2
$W$	tøjningsenergi	15.2
$x, y, z$	kartesiske koordinater	
$\alpha$	vinkel mellem gensidig flytning og flytningsdiskontinuitetslinje positiv som fjernelse	(3.16)
$\beta$	relativ opfyldelse af flydebetingelse $\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2r}$	(4.4)

Symbol	Betydning	Henvisning
$\gamma$	rumvægt. Indices angiver komponenter i specielle retninger	(4.5)
$\gamma$	forskydningstøjning	6.2
$\delta$	flytningsdiskontinuitet	(3.16)
$\Delta v$	specifik volumenforøgelse	(3.12)
$\Delta V$	total volumenforøgelse	(3.14)
$\epsilon$	længdetøjning, positiv som forlængelse	3
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	hovedtøjninger, $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$	3
$\eta$	drejning af stift legeme	(6.4.1.9)
$\theta$	første hovedspændingsretning	(4.3)
$\theta_v$	væghældningsvinkel	12.2
$\kappa$	krumning	
$\lambda$	hjelpestørrelse	(3.10)
$\lambda$	forskydningskoefficient i propper og siloer.	12.2
$\mu$	hjelpestørrelse	(3.10)
$v$	effektivitetsfaktor	15.2
$\rho$	relativ trækstyrke $\rho = \frac{f_t}{f_c}$	10.2
$\sigma$	normalspænding, positiv som træk	(3.1)
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	hovedspændinger $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	(3.2)
$\tau$	forskydningspænding	(3.1)
$\varphi$	friktionsvinkel	(3.1)
$\varphi_v$	friktionsvinkel langs væg	5.11
$\alpha$	retningsvinkel for spændingsdiskontinuitetslinje	5.8

# 19. REFERENCER

- [1773] Coulomb, Charles Augustin: "Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture". Mem. Acad. Roy. Pres. Divers Savants, Vol. 7, Paris 1773. Findes direkte aftrykt og i engelsk oversættelse i [72.3].
- [23.1] Prandtl, L.: Z. angew. Math. Mechanik, vol. 6, 1923.
- [23.2] Hencky, H.: "Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern". Zeits. ang. Math. Mech. 3 (1923), S. 241-251.
- [44.1] Suenson, E. & H. Dührkop: "Forsøg med murværk af molérsten og almindelige teglsten". Ingeniørvidenskabelige Skrifter, 1944, nr. 1.
- [51.1] Green, A.P.: "A Theoretical Investigation of the Compression of a Ductile Material between Smooth Flat Dies". Philosophical Magazine, Vol. 42, pp. 900-918, 1951.
- [51.2] Suenson, E.: "Teglstenspillers trykstyrke og sammentrykkelighed". Ingeniørvidenskabelige Skrifter 1951, nr. 1.
- [53.1] Bishop, J.F.W.: "On the Complete Solution to problems of Deformation of a Rigid-Plastic Material". Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1953, Vol. 2, pp. 43-53.
- [59.1] Glarbo, O.: "Murværks styrke". Festskrift til professor Anker Engelund. Laboratoriet for Bygningsteknik, Danmarks Tekniske Højskole, Meddelelse nr. 10, pp. 76-81, 1959,

- [62.1] Van den Berg, F.J.: "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams without Web Reinforcement, part 2 - Factors Affecting Load at Diagonal Tension Cracking". Journal of the ACI-Proceedings, Vol. 59, pp. 1587, November 1962.
- [63.1] Nadai, A.L.: "Theory of flow and Fracture of Solids". Volume two, 1963. McGraw-Hill Book Company, Inc.
- [64.1] Jenike, A.W.: "Storage and Flow of Solids". Bull. 123, Utah Engineering Experiment Station, University of Utah, Salt Lake City, Utah. October 1964.
- [65.1] "Brudhypotese for murværk". Sag 21/65. Laboratoriet for Bygningsteknik, Danmarks Tekniske Højskole.
- [66.1] Hartman, F.: "Berechnung des Fülldrucks in einem Silo". Beton und Stahlbetonbau, Vol. 61, Nr. 7, Juni 1966, S. 177.
- [67.1] Özden, K.: "An Experimental Investigation on the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams". Faculty of Civil Engineering, Technical University of Istanbul, 1967
- [68.1] Roscoe, K.H.: "The Critical State Concept and use of Short Wave Length Radiation to study the Onset and Maintenance of Flow in Granular Materials". University Department of Engineering, Cambridge. England 1968.
- [69.1] Chen, W.F. & D.C. Drucker: "Bearing Capacity of Concrete Blocks or Rock". Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, Vol. 95, No. EM4, 1969.
- [72.1] Izbicki, R.J.: "General Yield Condition. I. Plane Deformation". Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Techniques. Vol. XX, No. 7-8, 1972.



- [72.2] Gravesen, S. og H. Krenchel: "Betons tryk-, træk-, spalte- og bøjningstrækstyrke". Foreløbige resultater i ABK-sag 1/62. Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole. Januar 1972.
- [72.3] Heyman, Jacques: "Coulomb's Memoir on Statics". Cambridge 1972.
- [73.1] Khoo, C.L. & A.W. Hendry: "Strength Tests on Brick and Mortar Under Complex Stresses for the Development of a Failure Criterion for Brickwork in Compression". British Ceramic Society, Proceedings, No. 21, April 1973.
- [73.2] Jensen, Bjarne Chr.: "Koncentrerede belastninger på uarmerede beton-prismer". Bygningsstatistiske Meddelelser, Nr. 4, 1973.
- [73.3] DS411 Dansk Ingeniørforenings norm for betonkonstruktioner. 2. udgave, december 1973.
- [73.4] Walters, J.K.: "A Theoretical Analysis of Stresses in axially-symmetric Hoppers and Bunkers". Chemical Engineering Science, Vol. 28, 1973, pp. 778-789.
- [74.1] Nielsen, M.P.: "Beton 1". Danmarks Ingeniørakademi, Bygningsafdelingen, 1974.
- [75.1] Nielsen M.P. & A. Rathkjen: "Mekanik 6.1. Skiver og plader". Instituttet for Bygningsteknik, Ålborg Universitetscenter. Ålborg 1975.
- [75.2] Jensen, B.C. & M.P. Nielsen: "Om spalteforsøget og om koncentrerede kræfter på uarmerede betonprismer". Nordisk Betong 3-1975, pp. 9-13.
- [76.1] Bræstrup, M.W., M.P. Nielsen, B. Chr. Jensen & Finn Bach: "Axisymmetric punching of plain and reinforced concrete". Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, Serie R No. 75, 1976.

- [77.1] Nielsen, M.P., L. Pilegaard Hansen & A. Rathkjen: "Mekanik 2.2. Rumlige spændings- og deformations-tilstande". 2. udgave. Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, 1977.
- [78.1] Wang, P.T., S.P. Shah & A.E. Naaman: "Stress-strain Curves of Normal and Lightweight Concrete in Compression". Journal of the American Concrete Institute. November 1978, No. 11, Proceedings V. 75, pp. 603-611.
- [78.2] Hillerborg, A: "A Model for Fracture Analysis". Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Report TVBM-3005, Lund, Sweden, 1978.
- [79.1] Rune Brincker: "Murede vægges tværbæreevne". Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, Serie R, No. 111, 1979.
- [79.2] Roikjær, M., C. Pedersen, M.W. Bræstrup, M.P. Nielsen & Finn Bach: "Bestemmelse af ikke-forskydningsarmerede bjælkens forskydningsbæreevne". Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, Serie I, No. 62, 1979.
- [79.3] Hess, Uwe: "The Anchorage Strength of Reinforcement Bars at Supports". IABSE Colloquium, Copenhagen 1979. Plasticity in Reinforced Concrete. Final Report pp. 309-316.
- [80.1] Hatzinikolas, M., J. Longworth & J. Warwaruk: "Failure Modes for Eccentrically Loaded Block Masonry Walls". ACI-Journal, July-August 1980, pp. 258-263.
- [80.2] DS2082. Armeringsstål, prøvning af forankringsevnen. 2. udgave 1980.

- [81.1] Jensen, J.F.: "Platicitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton". Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, Serie R, No. 141, 1981.
  
- [81.2] Kristiansen, Niels Ørskov: "Silokonstruktioner - med udgangspunkt i strømningsforholdene". ABK's Informationsdag 1981. Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, Serie R, No. 134, 1981.
  
- [83.1] Hans Exner: "Betonbjælkens bøjningsbæreevne". Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks Tekniske Højskole, Serie R, No. 176, 1983.

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Department of Structural Engineering  
Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

SERIE R  
(Tidligere: Rapporter)

- R 126. GIMSING, NIELS J.: Four Papers on Cable Supported Bridges. 1980.
- R 127. SVENSSON, SVEN EILIF og JAN KRAGERUP: Interaktiv bæreevne af sammensatte søjler. 1980.
- R 128. GIMSING, NIELS J. og JØRGEN GIMSING: Analysis of Erection Procedure for Bridges with Combined Cable Systems. Cable Net Bridge Concept. 1980.
- R 129. ROSTAM, STEEN og EIGIL STEEN PEDERSEN: Partially Prestressed Concrete Bridges. Danish Experience. 1980.
- R 130. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress Analysis of Cracked Arbitrary Concrete Section under Service Load. 1981.
- R 131. BRINCKER, RUNE: Plane revneudvidelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Løsning af plane lineært viscoelastiske randværdiproblemer med kendt revneudbredelsesforløb. 1982.
- R 132. BRINCKER, RUNE: Plane revneudbredelsesproblemer i lineært viscoelastiske materialer. Revnemodeller og udbredelseskriterier. 1983.
- R 133. Reserveret.
- R 134. ABK's informationsdag 1981. 1981.
- R 135. Resuméoversigt 1980. Summaries of Papers 1980. 1981.
- R 136. BACH, FINN og M.P. NIELSEN: Nedreværdiløsninger for jernbetonplader. 1981.
- R 137. Publication pending.
- R 138. NIELSEN, LEIF OTTO og PETER NITTEGAARD-NIELSEN: Elementmetodeberegninger på mikrodatamat. 1981.
- R 139. MONDORF, P.E.: Concrete Bridges. Literature Index. 1981.
- R 140. NIELSEN, METTE THIEL: Lamb's Problem. Internal Harmonic Point Load in a Half-Space. 1981.
- R 141. JENSEN, JESPER FRØBERT: Plasticitetsteoretiske løsninger for skiver og bjælker af jernbeton. 1982.
- R 142. MÖLLMANN, H.: Thin-Walled Elastic Beams with Finite Displacements. 1981.
- R 143. KRAGERUP, JAN: Five Notes on Plate Buckling. 1982.
- R 144. NIELSEN, LEIF OTTO: Konstitutiv modellering af friktionsdæmpning. 1982.
- R 145. NIELSEN, LEIF OTTO: Materiale med friktion til numeriske beregninger. 1982.
- R 146. Resuméoversigt 1981. Summary of Papers 1981. 1982.
- R 147. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBÆK-HANSEN: Bolted End Plate Connections in Round Bar Steel Structures. 1982.
- R 148. NIELSEN, LEIF OTTO: Svingninger med friktionsdæmpning. 1982.
- R 149. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-Section. Part 1: Basic Analysis. 1982.
- R 150. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-Section. Part 2: Numerical Examples. 1982.

- R 151. KRENCHER, HERBERT and HANS WINDBERG JENSEN: Organic Reinforcing Fibres for Cement and Concrete. 1982.
- R 152. THIEL, METTE: Dynamic Interaction between Soil and Foundation. 1982.
- R 153. THIEL, METTE: Soil-Pile Interaction in Horizontal Vibration. 1982.
- R 154. RIBERHOLT, H. og PER GOLTERMANN: Sømmede træbjælker. 1982.
- R 155. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers forankring, specielt ved vederlag. 1. del. 1982.
- R 156. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers forankring, specielt ved vederlag. 2. del. Appendix A til F. 1982.
- R 157. ARPE, ROBERT and CLAES DYRBYE: Elasto-Plastic Response to Stochastic Earthquakes. 1983.
- R 158. WALD, FRANTISEK: Non-Linear Analysis of Steel Frames (with Special Consideration of Deflection). 1983.
- R 159. BRÆSTRUP, MIKAEL W.: Ten Lectures on Concrete Plasticity. Course given in Nanjing, China, October 1982. 1983.
- R 160. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Opbøjet spændarmering som forskydningsarmering. 1983.
- R 161. KRAGERUP, JAN: Buckling of Rectangular Unstiffened Steel Plates in Compression. 1983.
- R 162. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Revneteorier for enaksede spændingstilstande. 1983.
- R 163. Reserveret.
- R 164. GIMSING, NIELS J.: Preliminary Design and Optimization of Cable Systems for Bridges. 1983.
- R 165. Resuméoversigt 1982. Summaries of Papers 1982. 1983.
- R 166. NITTEGAARD-NIELSEN, PETER, JOHN FORBES OLESEN og HILMER RIBERHOLT: Elementmetodeberegning af skiveafstivede lamelkonstruktioner. 1983.
- R 167. RIBERHOLT, HILMER og PETER SPØER: Indlimede bolte til indfæstning af vingerne på Nibemølle-B. 1983.
- R 168. GIMSING, NIELS J. and ANDERS BORREGAARD SØRENSEN: Investigations into the Possibilities of Constructing Bridges with a Free Span of 3000 m. 1983.
- R 169. NIELSEN, LEIF OTTO: Randelementmetoden til 3-dimensional spændingsanalyse. 1983.
- R 170. NIELSEN, JOHN SANDER: A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Subjected to Torsion. Part I. Theory. 1983.
- R 171. NIELSEN, JOHN SANDER: A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Subjected to Torsion. Part II. Experiments. 1983.
- R 172. LANGSØ, H.E. og V. ASKEGAARD: Sammenhæng mellem frostnedbrydning af jernbetonbjælker og ændring af frekvensspektrum, dæmpningsforhold og bæreevne. 1983.
- R 173 - R 176. Reserveret. Publication pending.
- R 177. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBÆK-HANSEN: Optimum Design of Corner-Supported Double-Layer Space Trusses. 1983.

Abonnement 1.7.1983 - 30.6.1984 kr. 110,-.

Subscription rate 1.7.1983 - 30.6.1984 D.Kr. 110.-.

Hvis De ikke allerede modtager Afdelingens resumeoversigt ved udgivelsen, kan Afdelingen tilbyde at tilsende næste års resumeoversigt, når den udgives, dersom De udfylder og returnerer nedenstående kupon.

Returneres til  
Afdelingen for Bærende Konstruktioner  
Danmarks tekniske Højskole  
Bygning 118  
2800 Lyngby

Fremtidig tilsendelse af resumeoversigter udbedes af  
(bedes udfyldt med blokbogstaver):

Stilling og navn: .....

Adresse: .....

Postnr. og -distrikt: .....

The Department has pleasure in offering to send you a next year's list of summaries, free of charge. If you do not already receive it upon publication, kindly complete and return the coupon below.

To be returned to:  
Department of Structural Engineering  
Technical University of Denmark  
Building 118  
DK-2800 Lyngby, Denmark.

The undersigned wishes to receive the Department's  
List of Summaries:

(Please complete in block letters)

Title and name .....

Address.....

Postal No. and district.....

Country.....



425 00000